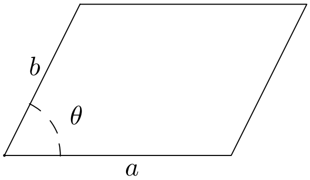
Sujet Agro-Véto (1) 2015

MATHÉMATIQUES

Méthodes de calcul et raisonnement
Durée : 2 heures 30 minutes

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet. L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

On considère un réseau dont la maille élémentaire est un parallélogramme, structure présente notamment en cristallographie. Cette maille élémentaire a alors pour aire $a.b.\sin\theta$.



On suppose que l'angle θ est la réalisation d'une variable aléatoire Θ suivant une loi uniforme sur $[0, \pi/2]$. L'étude de la variable aléatoire $\sin\Theta$ nécessite certaines connaissances sur une fonction intermédiaire notée A qui seront établies dans la partie I. La densité obtenue dans la partie II dont nous étudierons quelques propriétés apparait en pratique dans d'autres contextes (que nous n'étudierons pas dans ce sujet) sous une forme proche dans la loi dite de « l'arcsinus ». Les deux dernières parties étudient des fonctions polynomiales définies à l'aide de la fonction A.

Partie I : Définition et propriétés de la fonction A

1. Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1, 1]$.
   On note alors A la réciproque de la fonction $\begin{array}{ccc} [-\pi/2, \pi/2] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin(x). \end{array}$
2. Déterminer $A(-1/2)$ et $A(-\sqrt{2}/2)$.
3. Tracer le graphe de la fonction A dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
4. Soit x appartenant à $[-1, 1]$, montrer que $\cos(A(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
5. Montrer que la fonction A est dérivable sur $]-1, 1[$ et donner l'expression de sa dérivée sous une forme simplifiée ne faisant plus intervenir de fonction trigonométrique.
6. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre un de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$.
   (b) Montrer que la fonction A admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par
   $$A(x) = x + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$$

Partie II : Étude d'une variable aléatoire

On considère une variable aléatoire Θ suivant une loi uniforme sur $[0, \pi/2]$ et on s'intéresse à la variable aléatoire $X = \sin\Theta$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
2. En déduire que X est une variable aléatoire à densité dont une densité est
   $$f_X : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. (a) Montrer que la variable aléatoire X possède une espérance et donner sa valeur.
   (b) Quelle est la signification de ce résultat par rapport au contexte proposé dans le préambule du problème ?
4. Montrer que la variable aléatoire X^2 possède une espérance et donner sa valeur.
   On pourra utiliser, avec justification, le changement de variable $x = \sin t$.
5. On s'intéresse dans cette question au comportement asymptotique d'un échantillonnage de même loi que X.
   Pour cela, on considère un entier naturel non nul n ainsi qu'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ formé par n variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.

   On introduit la « moyenne empirique » $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

   (a) Que valent l'espérance et la variance de M_n ?

(b) Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

(c) En déduire, en fonction de n, de l'espérance et de la variance de X, un intervalle $[a_n, b_n]$ tel que
$$P(M_n \in [a_n, b_n]) \geq 95\%.$$

6. On s'intéresse, dans cette question, à des évènements « rares » associés à la variable aléatoire X.

   (a) A l'aide de la question 6 de la partie I, prouver l'existence de constantes A et B telles que :
   $$P\left(X \leq \frac{1}{n}\right) - \frac{A}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{B}{n^3}.$$

   (b) Pour tout entier n non nul, on pose $p_n = P\left(X \geq 1 - \frac{1}{n}\right)$.

      i. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

      ii. Prouver que, pour tout entier n non nul, on a $\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-p_n)\right) = 1 - \frac{1}{n}$.

      iii. Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre deux de la fonction cos.

      iv. En déduire une constante c telle que $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{c}{\sqrt{n}}$.

Partie III : Étude d'une suite de fonctions définies à l'aide de la fonction arcsinus

Pour tout entier n, on pose $f_n : x \mapsto \cos(2nA(x))$.

1. Calculer f_0, f_1 et f_2.
   On vérifiera en particulier que pour tout entier naturel k inférieur ou égal à 2, il existe un polynôme P_k tel que : $\forall x \in [-1,1]$, $f_k(x) = P_k(x)$.

2. (a) Soient a et b deux réels, exprimer $\cos(a+b)+\cos(a-b)$ uniquement en fonction de $\cos(a)$ et $\cos(b)$.

   (b) En déduire que, pour tout entier n, on a :
   $$\forall x \in [-1,1], \qquad f_{n+2}(x) + f_n(x) = 2(1-2x^2)f_{n+1}(x).$$

3. Montrer que pour tout entier n non nul, il existe un polynôme de degré $2n$ tel que
$$\forall x \in [-1,1], \qquad f_n(x) = P_n(x).$$

4. Soit n un entier.

   (a) Calculer f_n' et f_n''.

   (b) En déduire que f_n est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle
   $$(x^2-1)y'' + xy' - 4n^2y = 0.$$

Partie IV : Étude d'un endomorphisme lié à la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit n un entier non nul.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, $(X^2-1)P'' + XP' \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

   On définit alors l'endomorphisme :

   $$\phi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \to \mathbb{R}_{2n+1}[X],\ P \mapsto (X^2-1)P'' + XP'$$

   dont on va étudier les éléments propres.
   Pour toute valeur propre λ de ϕ, on notera E_λ l'espace propre de ϕ associé à la valeur propre λ.

2. Dans cette question, on suppose que $n = 1$.
   (a) Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On la notera M.
   (b) Prouver que M est diagonalisable et déterminer une base de vecteurs propres de M.

   On revient au cas général où n est un entier non nul quelconque.

3. Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$.
4. Montrer que ϕ est diagonalisable et donner son spectre.
5. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer $E_{(2k)^2}$ en fonction de P_k.

FIN DE L'ÉPREUVE

Indications Agro-Véto (1) 2015

Partie I : Définition et propriétés de la fonction A

Questions	Indications	Sup' ?
1.	Utiliser le théorème de la bijection.	✓
2.	Utiliser le lien entre la fonction sinus et la fonction A.	✓
3.	Utiliser la symétrie entre la courbe représentative d'une fonction bijective et de sa réciproque.	✓
4.	Utiliser la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$.	✓
5.	Utiliser le théorème de dérivabilité de la réciproque d'une fonction bijective.	✓
6.(a)	Utiliser le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $(1+x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.	✓
6.(b)	Intégrer le développement limité précédemment obtenu.	✓

Partie II : Étude d'une variable aléatoire

Questions	Indications	Sup' ?
1.	Commencer par déterminer le support de X puis traduire l'inégalité $X \leqslant x$ à l'aide de la variable aléatoire Θ.	✗
2.	Justifier que X admet une densité en utilisant le résultat sur la fonction de répartition d'une telle variable aléatoire.	✗
3.(a)		✗
3.(b)	L'espérance correspond à la valeur moyenne prise par la variable aléatoire.	✓
4.	Utiliser le théorème de transfert et celui de changement de variable.	✗
5.(a)	Utiliser la linéarité de l'espérance et l'indépendance pour la variance.	✓

5.(b)	Question de cours.	✗
5.(c)	Écrire sans valeur absolue l'événement dans la probabilité de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	✓
6.(a)	Utiliser l'expression de F_X obtenue à la question II-1.	✓
6.(b)i.	Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer p_n à l'aide de F_X.	✗
6.(b)ii.	Utiliser le lien entre la fonction sinus et la fonction A.	✓
6.(b)iii.	Question de cours.	✓
6.(b)iv.	Utiliser les questions II-6.(b)ii. et II-6.(b)iii.	✓

Partie III : Étude d'une suite de fonctions définies à l'aide de la fonction arcsinus

Questions	Indications	Sup' ?
1.	Pour f_1 et f_2, utiliser l'une des formules de duplication du cosinus.	✓
2.(a)	C'est la formule d'addition du cosinus !	✓
2.(b)	Choisir convenablement les nombres a et b dans la question III-2.(a).	✓
3.	Faire un raisonnement par récurrence à deux pas.	✓
4.(a)		✓
4.(b)	Remplacer dans l'équation différentielle.	✓

Partie IV : Étude d'un endomorphisme lié à la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Questions	Indications	Sup' ?
1.	Utiliser la propriété donnant le degré d'une somme de polynômes.	✓
2.(a)	Exprimer $\phi(1)$, $\phi(X)$, $\phi(X^2)$ et $\phi(X^3)$ en fonction de 1, X, X^2 et X^3.	✓
2.(b)	La matrice M est triangulaire supérieure !	✗
3.	Calculer $\phi(X^k)$ pour tout $k \in [\![0, 2n+1]\!]$.	✓
4.	Constater que les valeurs propres de ϕ sont deux à deux distinctes.	✗
5	Observer que chaque sous-espace propre de ϕ est de dimension 1.	✗

Corrigé Agro-Véto (1) 2015

Partie I : Définition et propriétés de la fonction A

1. La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Étudions la stricte monotonie de cette fonction sur cet intervalle. La fonction sinus est dérivable sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \sin'(x) = \cos(x)$$

Or, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos(x) > 0$ et $\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$. En particulier, la dérivée de la fonction sinus est strictement positive sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sauf en un nombre fini de points donc la fonction sinus est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nous en déduisons le tableau de variation suivant :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
sinus			1
		$\nearrow$	
	-1		

Le théorème de la bijection permet donc de conclure que :

$$\boxed{\text{la fonction sinus réalise une bijection de } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ dans } \sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]}$$

Commentaires

- ▷ Avant de dériver une fonction, on dit (voire justifie) que la fonction est dérivable sur l'ensemble sur lequel on dérive.
- ▷ **Attention :** la positivité au sens large de la dérivée ne permet pas de dire que la fonction est strictement croissante !
- ▷ Pour démontrer qu'une fonction f dérivable sur un intervalle I est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I, il suffit de démontrer que la dérivée f' est à valeurs strictement positives (respectivement strictement négatives) sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points.
- ▷ Il faut bien connaître les hypothèses du théorème de la bijection : la continuité et la stricte monotonie sont essentielles.

2. L'unique antécédent de $-\dfrac{1}{2} \in [-1, 1]$ par la fonction sinus dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est $-\dfrac{\pi}{6}$. Comme la réciproque de la fonction sinus : $\begin{array}{ccc} \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$ est la fonction A, on a :

$$\boxed{A\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}}$$

De même, l'unique antécédent de $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \in [-1, 1]$ par la fonction sinus dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est $-\dfrac{\pi}{4}$ donc :

$$\boxed{A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}}$$

Commentaires

C'est une question de cours. Il faut bien connaître les valeurs remarquables des fonctions trigonométriques.

3. Comme la fonction A est la réciproque de la fonction sinus : $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$, la courbe représentative de A et celle de la fonction sinus sont symétriques par rapport à la première bissectrice, c'est-à-dire par rapport à la droite d'équation $y = x$.