Chapitre I

Vocabulaire, notations et outils

Introduction à la mesure

Notre connaissance du monde est nécessaire à notre survie et utilise nos cinq sens (vue, ouïe, odorat, goût, toucher [1]). Cependant, la sensation est *subjective*, elle varie suivant les individus. Une approche plus scientifique utilise la mesure, qui permet des comparaisons *objectives*, à l'aide de références communes (étalons). La mesure, les indicateurs, et les données statistiques font aujourd'hui partie de la vie courante. Pourtant, ils sont souvent utilisés sans démarche structurée, à la façon de Monsieur Jourdain.

Historiquement, l'introduction des nombres puis de la mesure est intimement reliée à l'organisation de l'humain en société et au commerce qui en a résulté. Les premières mesures concernaient les longueurs, les poids et les surfaces de terrain. Les Égyptiens arpentaient déjà les terres, pour acheter les terres fertiles le long du Nil et payer les impôts afférents. La pesée a été introduite pour le commerce des marchandises. La mesure du temps dans la journée était basée sur le mouvement du soleil dans le ciel (cadran solaire) et sur les signes météorologiques. Pour affiner la mesure du temps et pouvoir donner des rendez-vous précis, les égyptiens inventèrent l'horloge à eau ou clepsydre [24] (3500 av. J.C.).

Mais la mesure peut utiliser n'importe quel étalon de référence. Les étalons de longueur et de masse notamment sont très différents suivant les cultures, les pays et les périodes de l'histoire [19]. Une des conséquences de la révolution française fut la mise en place d'une commission pour uniformiser les poids et mesures, afin de supprimer les droits féodaux associés. Après une longue évolution, le *système international* (SI) est né en 1960 et évolue encore. Parallèlement, les techniques de mesure se perfectionnent pour augmenter la précision des mesures, notamment attachées aux grandeurs fondamentales, et les statisticiens travaillent sur les mathématiques associées aux mesures répétées [2].

Dans ce contexte, les scientifiques et les ingénieurs ont mis au point des normes qui

1. Les cinq sens sont classés ici par ordre de sensibilité, par leur capacité à discriminer deux informations voisines.

2. Notons au passage que la mesure fait aussi partie intégrante de l'école, puisqu'il s'agit d'évaluer les compétences : Robert Toussignan [3] définit le problème : « La mesure de l'apprentissage ne peut être qu'une mesure approximative, indirecte qui utilise les manifestations de l'apprentissage, les comportements verbaux ou non verbaux, comme preuves ou comme indices du changement interne [...] Mesurer un apprentissage signifiera observer des comportements [...], puis compiler et exprimer quantitativement le résultat de cette observation. » Nous nous intéresserons uniquement à la mesure de grandeurs scientifiques (physique, chimie, mécanique...) dans cet ouvrage.

permettent d'évaluer les incertitudes de mesure, afin de tirer profit de l'apport des statisticiens. Le document fourni par le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) intitulé « Évaluation des données de mesure - Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure » [11] en est un résumé. Le vocabulaire employé dans cet ouvrage est celui qui est préconisé dans le « Vocabulaire International de métrologie » [13] Cet ouvrage est aussi proche que possible de ces documents de référence, dont l'utilisation n'est pas encore généralisée dans les milieux scientifiques et universitaires [4], notamment en ce qui concerne l'expression des incertitudes. Le développement suivant est principalement basé sur l'utilisation et la mise en œuvre des techniques mais une bibliographie pourra aider un lecteur curieux des démonstrations mathématiques. Enfin, l'objet de cet ouvrage est de sensibiliser le lecteur aux problèmes classiques de la mesure mais l'étude de cas spécifiques complexes devra passer par la consultation du Guide.

Le but de la mesure est la *caractérisation* d'un système (ou phénomène) en vue de le *comparer* à un autre, à fin d'amélioration ou simplement de connaissance. Faire un sondage d'opinion en Sciences Humaines, ou dans l'industrie pour connaître le *choix* des futurs clients lorsqu'on développe un nouveau produit (sensorique), sont toutes des démarches de mesure. En mesure physique, le *choix* correspond à la grandeur à mesurer, le questionnaire correspond au capteur (Fig. I.1), le traitement de l'information tient compte de la taille de l'échantillon de population et conduit à u ne incertitude (rarement communiquée...) sur les résultats du sondage.

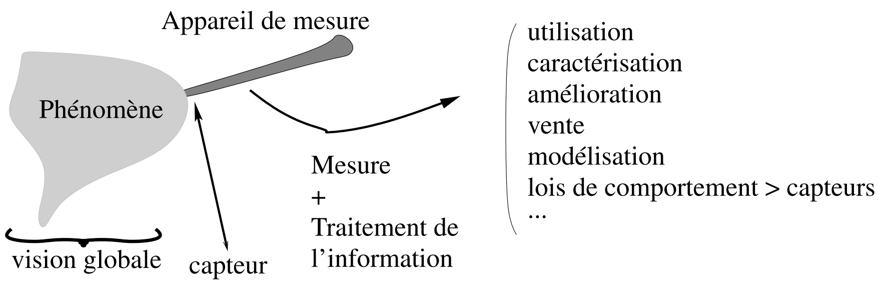

FIGURE I.1 – Principe de la mesure.

La vision globale du système (Fig. I.1) ne suffit pas et il est nécessaire de **quantifier** la propriété du système/phénomène étudié, et de déterminer l'incertitude sur cette valeur. Illustrons cette notion. Le prix Nobel de physique 1965, Richard Faynman, pose le problème dès le début d'une conférence [5] : « ... aux environs de 1948, des expériences montrèrent que la véritable valeur [du] moment magnétique [de l'électron] était 1,001 18 (avec une indétermination de 3 sur le dernier chiffre)... Les mesures [récentes] du moment magnétique de l'électron donnent une valeur de 1,001 159 652 21 (avec une indétermination de 4 sur le dernier chiffre) ; la théorie prédit une valeur de 1,001 159 162 46 (avec une incertitude environ cinq fois plus grande). Aujourd'hui, je peux vous affirmer avec fierté qu'il n'y a *pas d'écart significatif entre la théorie et l'expérience*. » Mais que vient donc faire cette indétermination ou incertitude dans une conférence de vulgarisation ? Pourquoi

4. Ce qui a justifié par exemple la publication en 2002, dans *European Journal of Physics* **23**, d'un article de Les Kirkup : « A guide to GUM ».

5. R. Feynman, *Lumière et matière, une étrange histoire,* (Points Sciences S86, InterÉditions, Paris, 1987).

s'attacher aux chiffres significatifs ? La mesure n'est-elle pas juste ? Qu'est-ce qu'un écart significatif ?

Pour répondre à ces questions, effleurons les secrets de la mesure. Mais résumons d'abord les principales applications de la mesure et les notations utilisées dans cet ouvrage.

Applications et caractéristiques de la mesure

Dans la section précédente, la mesure a été introduite comme une composante nécessaire des sciences. Elle est aussi vitale pour l'industrie. La mesure industrielle concerne en premier chef la qualité. Sa première application est le contrôle de la conformité des produits au cahier des charges. Dans ce domaine, la sécurité est (par exemple dans le domaine de l'aéronautique ou de l'automobile) une préoccupation majeure. Elle est même devenue un argument de vente. Dans l'industrie chimique, le nucléaire, l'industrie agronomique ou de transformation, l'industrie pharmaceutique mais aussi au niveau des collectivités locales, une mesure fiable doit permettre de déclencher une intervention, un arrêt de chaîne de production etc. Les grands problèmes d'environnement, de développement durable, ne peuvent être résolus qu'à partir de la mesure adéquate des polluants. Le passage du seuil de pollution n'est validable que si la mesure s'accompagne d'une incertitude fiable. L'ingénierie intégrée met en œuvre des procédés pour maîtriser en parallèle le produit et les processus. Même la logistique nécessite des contrôles par capteur pour compter automatiquement des passages et les données fournies par la mesure sont alors utilisables dans des *modèles* prédictifs. Le bon fonctionnement du *modèle* dépend fortement de la qualité des mesures. L'apparition des normes dans tous les secteurs industriels oblige à connaître les principes et les pièges de la mesure.

Un processus de mesurage est complexe. On identifie sept sources de variabilité de la mesure :
- la définition du mesurande (grandeur mesurée),
- l'identification de l'objet ou de l'élément mesuré (un produit extrait parmi une production de masse),
- la procédure de mesure ou protocole,
- l'appareil de mesure,
- l'étalonnage, le suivi de performance des instruments,
- l'environnement de mesurage,
- l'opérateur de mesurage.

Ces sept sources de variabilité peuvent expliquer la relativité de la mesure, et surtout, dans un contexte industriel donné, la dispersion des mesures. Ceci conduit à identifier :
- les grandeurs mesurées (Chapitre II),
- les unités du résultat de mesure, les différents types de mesure, les propriétés de la mesure, les erreurs de mesure (Chapitre III)
- les incertitudes de mesure (Chapitre IV, en relation avec la normalisation),
- les limites et les caractéristiques de appareils en terme de transfert (Chapitre V),
- les différentes méthodes de mesure, en relation avec le choix des appareils et donc des capteurs (Chapitres VI & VII).

Pour développer un produit et le certifier on doit effectuer des essais. On en trouve la définition suivante : **« Essai : opération technique qui consiste à déterminer une ou**

plusieurs caractéristiques ou la performance d'un produit, matériau, équipement, organisme, phénomène physique, processus ou service donnée, selon un mode opératoire spécifié. » L'essai fait donc appel à la métrologie industrielle. Par exemple, le contrôle, la mesure des dimensions de pièces ou de structures peut révéler un incident dans le bon déroulement de la fabrication, du montage et de la mise en service d'un produit. *L'apparition d'une dérive de la dimension des pièces fabriquées pourra révéler un déréglage de la machine. Elle doit être mesurée de manière fiable car elle peut induire l'arrêt d'une chaîne de production pour maintenance, avec les surcoûts induits.* **La *capabilité* machine est la capacité d'une machine à réaliser des pièces dans l'intervalle de tolérance mentionné dans le cahier des charges.** C'est une caractéristique statistique de la production. La mesure de distances, de positionnement inférieurs au mètre est effectuée en général à l'aide de dispositifs dits de contrôle non destructif. Le dispositif peut utiliser deux capteurs optiques (de type théodolite par exemple) pour viser l'objet à mesurer. Les deux images acquises et le repérage des angles [6] des viseurs des théodolites par rapport à une direction de référence permet de situer voire de reconstituer une image tridimensionnelle de l'objet en repérant des points de sa surface. Un micro-ordinateur traite les données et effectue les calculs nécessaires. Cet exemple pratique implique deux conséquences.

- La mesure « utilise » tous les domaines scientifiques (optique, géométrie, acquisition, transfert et traitement des données, dans notre exemple) et donc nécessite, pour être dominée, une culture scientifique importante.
- La mesure constitue un marché industriel important.

Le choix d'un capteur nécessite en particulier des connaissances des effets physiques de base ; de plus, le traitement des données oblige à avoir des connaissances en statistique et en traitement du signal. Or un technicien, un ingénieur, un scientifique ne peuvent être spécialistes dans tous ces domaines. C'est ce qui m'a conduit à proposer cet ouvrage, afin d'augmenter la connaissance de la mesure, en simplifiant au maximum la présentation des concepts, tout en restant très proche des nécessités industrielles. La sensibilisation au problème complexe de la mesure est une démarche pluridisciplinaire, qui ne peut se réduire à un petit chapitre d'introduction dans un cours de mécanique, d'électricité, d'électronique, d'optique ou de chimie.

Glossaire

Ce glossaire est destiné à faciliter le travail d'apprentissage. Pour apprendre tout le vocabulaire utile, on se reportera à l'*Index*, page 223 en fin d'ouvrage.

Dans la suite, on distinguera les **fréquences** liées à l'exploitation statistique des mesures (non dépendantes du temps), des fréquences d'un signal dépendant du temps.

Notons immédiatement que l'**incertitude-type** est l'incertitude conforme aux normes.

Notations : Les vecteurs sont notés en gras, conformément aux recommandations internationales : $\vec{E} = \mathbf{E}$.

- $E[x]$: fonction partie entière (ne pas confondre avec l'espérance mathématique).
- N : nombre total de mesures.
- Δ_c : incertitude constructeur.

6. ou des distances…

- Δ_{max} : incertitude maximale.
- $\bar{m}_N(G)$: moyenne des N mesures de la grandeur G.
- $\sigma_N(G)$: écart-type **sans biais** calculé sur N mesures de la grandeur G.
- $\sigma_N(\bar{m}_N(G))$: écart-type **de la moyenne** calculé sur N mesures de la grandeur G : $\sigma_N(\bar{m}_N(G)) = \sigma_N(G)/\sqrt{N}$.
- $m_i(G)$: i^e mesure de la grandeur G.
- $m_i^n(G)$: i^e mesure centrée réduite (ou normalisée) de la grandeur G.
- u : incertitude-type (conforme aux normes, « uncertainty » en anglais).
- u_A : incertitude-type de type A (conforme aux normes).
- u_B : incertitude-type de type B (conforme aux normes).
- u_c : incertitude-type composée (conforme aux normes).
- $U = k.u_c$: incertitude-type élargie d'un facteur k (conforme aux normes).
- f_i : fréquence relative des mesures : nombre de mesures **identiques** divisé par le nombre total de mesures : $f_i = n_i/N$.
- f_i^c : fréquence relative des mesures : nombre de mesures **par classe** divisé par le nombre total de mesures.
- f_i^t : fréquence relative théorique (calculée à partir de la fonction de répartition associée à la loi de probabilité).
- $N(0,1)$: loi normale centrée réduite (loi de Gauss de moyenne 0 et d'écart-type 1).

- $f(x)$: densité de probabilité d'une loi de probabilité.
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$: fonction de répartition d'une loi de probabilité. Par exemple la valeur de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite pour la valeur centrée réduite m_i^n s'écrit $F_{N(0,1)}(m_i^n)$.
- $F_m(i)$: cumulants. n_i étant le nombre de mesures centrées réduites ayant la valeur m_i^n, $F_m(i) = F_m(i-1) + n_i/N = F_m(i-1) + f_i$ (avec $F_m(0) = 0$).
- n_{cl} : nombre de classes.
- L : nombre de degrés de liberté : il est égal au nombre de classes moins trois dans le test d'ajustement du χ^2 et au nombre de mesures moins un pour déterminer l'intervalle de confiance.
- $\jmath$ ou $\imath$ est l'imaginaire pur : $\jmath^2 = \imath^2 = -1$. Attention, on utilise $\jmath$ en électricité pour éviter la confusion avec le courant électrique i. Par contre, il ne faut pas confondre $\jmath$ avec le nombre complexe j en mathématiques qui est une racine cubique de l'unité.
- $\Im(z)$ est la partie imaginaire du nombre complexe z.
- $\Re(z)$ est la partie réelle du nombre complexe z.
- z^* est le conjugué de z : si $z = x + \imath y$ ($(x,y) \in \mathbb{R}^2$), alors $z^* = x - \imath y$.
- $|z|^2 = z.z^*$ est le module carré du nombre complexe z, il correspond au carré de la longueur du vecteur $\mathbf{OM} = \overrightarrow{OM}$, O étant l'origine du repère dans le plan (complexe) et z étant l'affixe de M (coordonnées (x,y) dans le plan, correspondant au nombre complexe $z = x + \imath y$).
- Champ vectoriel : vecteur dont les coordonnées sont des fonctions des variables d'espace : $(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$.
- **rot** $(\ldots)$ est le rotationnel d'un champ vectoriel. Les résultat est un champ vectoriel. En coordonnées cartésiennes l'action de cet opérateur sur le champ vectoriel s'écrit :

$$\mathbf{rot}\,((u,v,w)) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

- div (...) est la divergence d'un champ vectoriel. Le résultat est une fonction scalaire. En coordonnées cartésiennes l'action de cet opérateur sur un champ vectoriel s'écrit :
$$\mathrm{div}\,((u,v,w)) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$
- **grad** (...) est le gradient d'une fonction. Le résultat est un champ vectoriel. En coordonnées cartésiennes l'action de cet opérateur sur une fonction $f(x,y,z)$ s'écrit :
$$\mathbf{grad}\,(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Formulaire

1. Formules d'Euler : $\cos(x) = \dfrac{\exp(\imath x) + \exp(-\imath x)}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{\exp(\imath x) - \exp(-\imath x)}{2\imath}$,
2. Formules d'addition : $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$,
   $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a)$,
3. Formules de multiplication : $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$,
   $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$, et $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a-b) + \sin(a+b)}{2}$.
   Exercice : à partir des formules ci-dessus, montrer :
   $$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$
4. La fonction réciproque de la fonction $\cos$ est la fonction $\arccos = \cos^{-1}$, la réciproque de la fonction sinus est $\arcsin = \sin^{-1}$. On a :
   $$\frac{d}{dx}(\arccos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } \frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = +\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
5. La fonction réciproque de la fonction $\tan$ est la fonction $\arctan$, on a
   $$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$$
6. $\ln$ est le logarithme naturel ou neperien : $\ln(e) = 1$, on a les propriétés : $\ln(x^n) = n\ln(x)$ et $\ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$. Le logarithme naturel est la fonction réciproque de la fonction exponentielle : $\exp(x) = y \Leftrightarrow \ln(y) = x$.
7. $\log$ ou $\log_{10}$ est le logarithme décimal : $\log(x) = \ln(x)/\ln(10)$, $\log(10) = 1$, $\log(100) = 2\ldots$
8. La fonction exponentielle est croissante comme la fonction logarithme et elle vérifie les mêmes propriétés que la fonction d'élévation à la puissance (exposant) n : $(\exp(a))^n = \exp(n.a)$, $\exp(a+b) = \exp(a).\exp(b)$, que l'on note encore : $e^a.e^b = e^{a+b}$.

Chapitre II

Grandeur

Sommaire

1 Grandeurs **7**
2 Lois de comportement **8**
3 Dimensions **9**
4 Équation aux dimensions, principe d'homogénéité **10**
5 Pièges à éviter : le modèle inexact **14**
5.1 Modèle mathématique inapproprié 14
5.2 Modèle physique inapproprié 16

But : identifier les grandeurs, savoir vérifier une équation aux dimensions, connaître un certains nombre de grandeurs fondamentales.

1 Grandeurs

Définition II.1 (Grandeur - mesurande)
Grandeur - mesurande : toute propriété d'un objet, susceptible de varier. On cherche à déterminer les lois de comportement des grandeurs. On trouve la définition suivante [26] : *Une grandeur mesurable est la caractéristique d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance qui peut être définie qualitativement et exprimée quantitativement. On l'appelle aussi mesurande*. La définition du VIM [13] est très proche : *propriété d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance, que l'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence. La référence peut être une unité de mesure, une procédure de mesure, un matériau de référence, ou une de leurs combinaisons*. ☺

Le mesurande s'accompagne de bruit lié au protocole, aux instruments ou à d'autres phénomènes qui perturbent le signal à mesurer et limitent la précision de la mesure. ♢

Certaines grandeurs sont dites mesurables. D'autres sont repérables par des indicateurs. Ces dernières sont dites subjectives (forme, moral...). Nous nous intéresserons aux grandeurs mesurables, c'est-à-dire que l'on peut mettre en correspondance avec une échelle de nombres par une mesure.

Grandeurs indépendantes du temps : une tension continue, une longueur à un instant donné, une température à un instant donné... Nous étudierons la mesure de ces grandeurs dans le chapitre IV.

Grandeurs dépendantes du temps : une tension alternative, la longueur d'un corps chauffé en fonction du temps, une température au cours de la journée… Nous étudierons la mesure de ces grandeurs dans le chapitre V.

Remarque II.1 (Cas de la thermodynamique)
En thermodynamique, on distingue les grandeurs extensives (dépendant de la taille du système, si seules des forces de contact sont mises en jeu dans le système [1], ce sont le volume, la masse, la charge électrique) et les grandeurs intensives (pression, température…) Ces deux types de grandeurs sont mesurables. ♢

Exercice 1

☺ **Définition II.2 (Grandeur et grandeurs fondamentales)**
Toute grandeur peut s'exprimer à partir de **sept** grandeurs fondamentales : temps, longueur, masse, courant électrique, température thermodynamique, intensité lumineuse et quantité de matière.

Les grandeurs fondamentales sont arbitrairement fixées (International System of Quantitie s : ISQ).

La longueur pouvant être reliée au temps par une constante fondamentale : la vitesse de la lumière dans le vide $c_0 = 299\ 792\ 458 \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Il est donc possible d'exprimer toutes les longueurs sous forme de temps de propagation de la lumière dans le vide [2]. Par exemple, la distance qui vous sépare de ce livre est de $30 \mathrm{cm}$donc 10^{-9}s. Ceci est peut-être moins habituel, moins pratique et a conduit à conserver la longueur comme grandeur fondamentale [3]. ♢

Les grandeurs fondamentales facilitent l'expression des résultats des mesures dans les unités du système international. Cette simplification permet aussi de développer l'analyse dimensionnelle, sorte de « preuve par neuf » des équations, correspondant aux lois de comportement [4].

Toute grandeur a une dimension. On peut tester la cohérence d'une loi de comportement en vérifiant les équations aux dimensions.

2 Lois de comportement

Définition II.3 (Loi de comportement)
Une loi de comportement est une relation mathématique entre différentes grandeurs intervenant dans un problème. Les lois de comportement en physique, en chimie, relient des grandeurs entre-elles en faisant intervenir des constantes ou des paramètres. ♢

1. Si une réaction chimique a lieu entre deux gaz par exemple, le volume du produit de la réaction n'est en général pas la somme des volumes des deux gaz…
2. Ce concept est à rapprocher des phrases de la vide courante : « Troyes est à 1h30 de Paris »…
3. On remarquera plus loin que la définition du mètre (unité de mesure des longueurs dans le système international) utilise la vitesse de la lumière dans le vide. Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 de seconde. La vitesse de la lumière dans le vide est donc **exactement** égale à 299 792 458 mètres par seconde.
4. Toute équation écrite dans une copie devrait s'accompagner, au moins au brouillon, de la vérification des dimensions.