# Chapitre 1

# Méthodes

## I Conseils généraux

### 1) Généralités sur l'activité mathématique

#### Objets mathématiques et phrases mathématiques

Avant tout, prenez conscience que lorsqu'on « fait des maths », comme dans n'importe quelle autre activité, on **manipule des objets** ayant une nature précise (nombre, fonction, vecteur).
Dans un texte (mathématique ou autre), chaque symbole représente un objet précis. Il faut garder en permanence en mémoire la nature de chacun de ces objets, ainsi que la manière dont chacun peut être utilisé. C'est absolument capital pour la compréhension d'un cours ou la rédaction d'un texte (par exemple la résolution d'un exercice. . .).
Souvent, l'incompréhension face à un cours ou pendant la résolution d'un problème provient d'un manque de conscience du **sens des symboles** et de la **connexion entre les différents objets considérés**.

L'incompréhension peut aussi être due à des difficultés avec le langage mathématique en général : pour manipuler les objets mathématiques, **on doit faire des phrases** avec sujet, verbe, complément, etc. , comme dans n'importe quel autre langage.
Par exemple, la phrase « $x = 5$ » s'écrit en français :

$x$ *(sujet)* égale *(verbe)* cinq *(C.O.D.)*

Pourtant, nombreux sont les élèves qui perdent de vue ce principe et font rimer mathématique et magique : au lieu d'écrire des phrases simplement cohérentes, ils invoquent les termes sacrés et des symboles mystérieux, en espérant que cela aura un sens (et rapportera quelques points...)

**Lorsque vous rédigez**, faites des phrases EN FRANÇAIS (avec des verbes...). Structurez votre pensée avec des paragraphes, des tirets, des numéros, une structure **visible** formée de phrases grammaticalement correctes.
**Lorsque vous lisez un texte**, cours ou énoncé, et que vous vous sentez perdu(e), reportez-vous à l'énoncé ou au contexte pour retrouver le sens de tel symbole qui vous a échappé, le lien entre tels objets vus précédemment, etc.
**Enfin, lisez les textes en entier !** D'une part, il arrive fréquemment que l'on n'arrive pas à comprendre ce qui est écrit *parce que l'on a omis de lire une phrase, voire un paragraphe entier...* D'autre part il arrive souvent que la lecture de parties ultérieures d'un texte, en particulier d'un énoncé, nous éclaire sur des parties antérieures.
Une fois ces habitudes prises, on peut commencer à "faire des maths".

### La règle d'or : principes, hypothèses et déduction

« Faire des mathématiques », c'est avant tout parvenir à un chemin correct d'un point de vue logique, partant d'une phrase $A$ pour arriver à une phrase $B$ (phrase que l'on ne connaît pas forcément au début).

La phrase de départ $A$ peut être :
* un **résultat du cours** : axiome, théorème... (exemple : « Par un point donné, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée. ») ;
* un **élément de l'énoncé** (exemple : « Comme le triangle ABC est équilatéral, alors $AB = BC = CA$ ») ;
* une **conjecture** dont on ignore si elle est vraie, et que l'on veut soi-même tester : « je ne suis pas sûr(e) que la phrase $A$ soit vraie, mais si elle était vraie, quelles en seraient les conséquences ? ». Si les conséquence amènent à une contradiction, c'est que la phrase A était fausse.

Le gros problème de beaucoup d'élèves : **bien penser à utiliser toutes les hypothèses.** Il est donc CAPITAL de retenir les hypothèses des théorèmes, qui sont leurs conditions d'utilisation, si on ne veut pas faire n'importe quoi.

## 2) Les objets qu'on manipule : les *symboles*

### Pourquoi utiliser des lettres et des symboles ?

Il y a fondamentalement deux raisons.

Premièrement, faire des mathématiques, c'est avant tout manipuler des objets qui sont dans notre tête, et pas dans le monde physique. Pour les manipuler, on doit leur donner un nom : c'est ce nom que l'on va appeler à chaque fois qu'on voudra toucher à un objet (exemple : le nombre 2, le point $A$). Ce nom est à son tour représenté sur le papier par un symbole (2, $A$). On n'a pas le choix.

Mais lorsque l'on change de classe, des choses se mettent parfois à devenir plus compliquées : on se met à avoir des « a » et des « b » à la place de « 3 »ou de « 4,5 ». Souvent des élèves disent, à propos d'un exercice présentant des calculs (par exemple des équations, ou des choses plus abstraites) : « lorsque c'est avec des nombres, j'y arrive, mais quand il y a des lettres, je ne comprends plus rien ».
Pourtant, les nombres sont écrits avec des chiffres, en suivant des règles qui ne sont pas si simples : le « 2 » qui est chiffre des unités ne fait pas tout à fait la même chose que le « 2 » qui est chiffre des dizaines. Mais ces règles vous sont naturelles car vous les avez intégrées dès le plus jeune âge.
L'utilisation des lettres est un saut d'abstraction : plutôt que de compter avec les nombres, on compte avec des symboles qui représentent ces nombres, et que l'on arrive à manipuler parce que l'on connaît bien les règles de calcul.

Voici donc la deuxième raison : l'emploi de symboles permet de généraliser les calculs. Pour pouvoir aller plus loin, on a besoin de se débarrasser des cas particuliers : si on compte uniquement sur ses doigts, on est vite limité.
Écrire les nombres à l'aide de chiffres sera suffisant pour tenir les comptes de son magasin, mais ne suffira pas pour résoudre des problèmes plus compliqués. On a alors besoin de parler de n'importe quel nombre et de le représenter à l'aide d'une lettre ($x$ par exemple).
Considérons cet exercice : existe-t-il un nombre entier qui n'est pas multiple de 3 et dont le carré est multiple de 3 ? On peut le résoudre en notant $x$ le nombre entier recherché (essayez !), sinon il faudrait tous les essayer ! ! !

### Présentez vos nouveaux amis

En mathématiques, on fait référence aux objets en utilisant leur nom : un nombre réel sera par exemple appelé $x$, $f$ sera le nom d'une fonction... Il y a alors deux possibilités :

• Soit on connaît exactement l'objet dont on parle (par exemple $x$ vaut 2, $f$ est la fonction racine carrée).

• Soit l'objet est indéterminé mais appartient à une certaine catégorie (par exemple, $x$ est un nombre entier naturel, $f$ est une fonction croissante).
Lorsque l'on travaille avec des tels objets, il faut toujours préciser la catégorie à laquelle ils appartiennent. Par exemple, considérons l'équation $x^2 = 1$. Il faut indiquer si l'on cherche les solutions parmi les nombres positifs (auquel cas $x$ vaut 1) ou les nombres réels (auquel cas $x$ peut valoir 1 ou $-1$).

Avant d'utiliser un symbole, il faut toujours le "présenter", en précisant ce qu'il représente. **On doit donc systématiquement préciser ce qu'on veut dire lorsqu'on utilise un symbole qui n'est pas clairement déterminé.**

## 3) *Faire des mathématiques* : chercher, expliquer, rédiger

Ces trois verbes constituent le cœur de l'activité mathématique, et sont indéfectiblement liés.

• **Chercher** n'est pas *trouver*. Prenons le cas des exercices, même si ce qui suit est aussi valable pour la lecture d'un cours.
A la lecture d'une question, certains élèves ont l'habitude de comprendre quasi instantanément ce qu'ils doivent faire pour la résoudre. Ils entrent directement dans la partie technique de la résolution. Cela est dû, d'une part, à leurs facultés intellectuelles et, d'autre part, à la relative facilité des problèmes auxquels on est généralement confronté au lycée.
Conséquence perverse de cette situation : ces élèves, confrontés à un nouveau type de problème et ne voyant pas quoi faire tout de suite, se sentent souvent perdus, persuadés qu'ils n'arriveront jamais à en trouver la solution.
Cette croyance est fausse. Pour s'améliorer réellement, il faut dépasser les limites de ce qui est naturel en se frottant à des choses qu'on n'arrive pas à faire du premier coup. Cela implique en premier lieu de combattre une certaine angoisse de l'échec, et d'intégrer l'idée que la compréhension totale passe :
- par des étapes de compréhension partielle ;
- par des erreurs, riches en enseignements ;
- par des oublis, qui nous montrent combien la disparition de tel élément de notre mémoire affecte l'ensemble de l'édifice.

Ainsi, après une tentative infructueuse sur un exercice ou un cours, il faut s'y frotter à nouveau, deux heures, deux jours ou deux mois après.

En outre, pour aider à avancer dans le noir, il faut de la méthode. Pour cela nous vous renvoyons à la prochaine section (Comment chercher un exercice).

• **Expliquer**. En tant qu'élève, vous devez régulièrement convaincre le correcteur de la véracité de vos propos. En tant qu'enseignant, notre premier objectif est de rentre intelligibles des choses qui sont au préalable inconnues de nos élèves.
Dans votre future activité professionnelle, il vous faudra bien souvent expliquer des choses. Ainsi, expliquer constitue la partie sociale de toute activité ayant une composante intellectuelle, surtout en maths où « tout est dans la tête ».
Réciproquement, tenter d'expliquer quelque chose est une bonne manière de se l'approprier et d'en maîtriser réellement le fonctionnement, car cela nécessite d'adapter son discours en fonction de ce qu'on trouve réellement important.
Il faut donc comprendre pour expliquer, mais expliquer aide à comprendre. C'est ainsi que la recherche et l'explication sont liées, les deux activités étant mutuellement bénéfiques.

• **Rédiger.** En mathématiques, la rédaction est le produit fini. Dans ce domaine comme dans d'autres, c'est ce sur quoi vous serez jugé, ou ce en quoi vous serez utile. Existe-t-il pour autant UNE SEULE rédaction correcte et naturelle pour chaque problème rencontré ? Non. Il y a souvent plusieurs manières d'aborder un problème, et donc d'en construire une solution.
Toutefois, il y a des conditions à remplir pour donner une bonne solution. Une bonne solution doit être **juste** (c'est-à-dire correcte d'un point de vue formel), **complète** (il ne doit rien manquer d'essentiel) et **claire** (le raisonnement doit être le plus concis et le plus précis possible).
S'il est évident que le fait d'avoir cherché et de pouvoir expliquer sont des pré-requis pour une rédaction finale, la recherche comme l'explication sont grandement aidées par des rédactions partielles, faites au fur et à mesure : on ne peut pas penser à tous les aspects d'un problème en même temps, et coucher ses idées sur papier, devant ses yeux, permet de les avoir à proximité et de ne pas se perdre.
Lorsqu'on cherche à comprendre un problème nouveau, le va-et-vient permanent entre ce qu'on construit dans sa tête et ce qu'on a conservé devant ses yeux sur un papier permet d'accoucher d'une idée nouvelle qui nous manquait pour conclure cette recherche, pour expliquer ce problème.
C'est en ce sens que le travail de rédaction, à l'écrit (insistons sur ce point), est intrinsèquement lié au reste, à la fois comme but et comme moyen.

## II Comment chercher un exercice ?

Résoudre un problème de mathématiques, c'est souvent une aventure, un parcours, un combat.
Au bout d'un moment, quand on en a livré beaucoup, les combats semblent naturels et les techniques viennent spontanément. Au début on peut se sentir désarçonné, voire abattu, quand on a l'impression qu'on n'avance pas.

S'il n'y a pas de recette miracle et que rien ne remplace la pratique, nous pouvons néanmoins donner quelques conseils et dégager des techniques utiles. La phase de recherche peut être libre, brouillonne, partiellement fausse si c'est votre style. N'hésitez pas à coucher sur le papier des débuts de calculs et des idées mêmes partielles. Elle doit aussi contenir des phases sérieuses où les avancées sont bien justifiées, sécurisées, solidifiées, où des calculs importants sont bien posés. Et bien sûr la phase de rédaction est là pour mettre les choses au propre et les idées au clair.

De même que le professeur ne peut pas *manger à votre place*, il ne peut pas *comprendre à votre place* ! Tout juste peut-il rendre votre *effort de compréhension* plus aisé, plus agréable, plus progressif, et vous signaler vos erreurs, pour que *vous* les corrigiez.
Bref, chercher, c'est éviter la passivité et prendre en main la compréhension. Pour cela, il faut poser le problème de manière claire :

∗ Qu'est-ce que je sais / qu'est-ce que je veux montrer ?
∗ Élaborer un plan et le suivre.

Cette partie aborde quelques aspects de la phase de recherche en mathématiques.
∗ Chercher et ne pas trouver.
∗ Chercher en mode robot, la méthode déductive.
∗ Chercher en commençant par simplifier le problème.
∗ Chercher en utilisant la solution.
∗ Dessiner c'est gagné.

## 1) Chercher et ne pas trouver.

Une personne qui fait des mathématiques apprend à ne pas toujours gagner ou à devoir s'y reprendre à plusieurs fois, alors qu'au début, beaucoup pensent : « je n'y arriverai jamais » ou « j'ai cherché une heure et je n'ai pas trouvé donc j'ai perdu une heure ». Et bien non. L'heure passée a peut-être entamé votre adversaire, et cette heure de travail vous a sûrement permis de vous familiariser avec ses points forts et ses points faibles. La prochaine fois, sur celui-là ou sur un autre, l'issue sera peut-être différente.
Devant un exercice à résoudre, on peut penser à la situation suivante. Votre but est d'atteindre une île à la nage depuis le rivage et vous vous jetez à l'eau. Vous ferez peut-être demi-tour car vous ne parviendrez pas à atteindre l'île, par manque de force. Mais vous n'avez pas tout perdu : vous perfectionnez votre technique de nage et vous vous familiarisez avec les courants. Peut-être que la prochaine fois vous irez bien plus loin, et vous finirez sûrement par y arriver, même si, comme pour la résolution de l'exercice, les premiers essais ont pu être un peu ingrats et laisser un sentiment d'échec pur et simple.
Dans le monde de la recherche, le problème posé ne sera pas toujours résolu. Mais le chemin parcouru, s'il n'a pas mené au but, peut avoir fait apparaître des choses très intéressantes, peut-être même plus intéressantes que le but initial. Autrement dit, parfois nous ne résolvons pas le problème de départ mais un autre problème, qui vaut pour lui-même et peut très bien constituer une première étape vers l'objectif. Les exemples dans le quotidien des chercheurs ne manquent pas. Pour citer un exemple fameux, à plus grande échelle, la recherche d'une preuve pour le théorème de Fermat a donné naissance à des branches entières des mathématiques (courbes elliptiques, formes modulaires). Nous pourrions en dire de même pour la conjecture de Riemann et celle de Poincaré, démontrée récemment. En n'atteignant pas le but tout de suite, le chercheur est amené à se poser beaucoup de questions et à chercher à développer de nouveaux outils ou points de vue, avec comme ligne directrice la résolution du problème. Le problème devient une motivation en soi pour avancer, un moteur dans le développement d'idées.
Enfin ne vous découragez pas parce que vous trouvez que les autres sont plus rapides. Il y a toujours des gens plus rapides que soi. Et puis, ils ont peut-être tout simplement

plus d'entraînement. Enfin, si la rapidité donne des points dans les premiers examens ou concours de votre scolarité, elle ne donne pas toutes les clefs...

## 2) Chercher en mode robot.

Bien souvent, un problème de mathématiques, ce sont quelques hypothèses et un résultat à prouver. On a donc tendance à écrire les hypothèses en haut de sa feuille et le résultat en bas. Le but ? Écrire les lignes successives qui permettent de relier le haut (les hypothèses) au bas (la conclusion) avec à chaque étape des implications claires. Qu'est-ce qu'une implication claire ? Quelque chose qui est évident du point de vue logique ou mathématique. Il n'est pas toujours facile de savoir ce qui évident et ce qui ne l'est pas. Mais si vous êtes le seul à trouver qu'une étape est évidente, c'est mal parti. Il faut que vos camarades soient également convaincus. Mettez-vous dans la peau du professeur qui veut lui aussi être convaincu par votre raisonnement. Acceptera-t-il votre argument sans broncher ? Oui quand l'implication est garantie par un résultat du cours, qui doit être alors cité. On arrive ainsi pas à pas au résultat attendu.
*Exemple 1* : Montrer que si $-2 \leqslant n \leqslant 4$, alors $1/18 \leqslant 1/(n^2+1) \leqslant 18$.
*Exemple 2* : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \leqslant x$.
Le premier se traite directement par encadrement successifs, le deuxième à l'aide d'un tableau de variation, pas besoin ici d'inventer de nouvelles méthodes.
Plus généralement, même si on ne vous donne pas le résultat final, il y a beaucoup de questions pour lesquelles il suffit de répéter une méthode classique qui mène toujours au résultat. Par exemple, factoriser un polynôme de degré deux en calculant le discriminant ou étudier les variations d'une fonction à l'aide du signe de la dérivée.
*Exemple 1* : Factoriser $x^2 - 8x + 7$.
*Exemple 2 :* Développer $(a+b)^3$.
*Exemple 3 :* Etudier les variations de la fonction $x \to \cos(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

## 3) Chercher en commençant par simplifier le problème.

Quand dans la vie vous vous heurterez à un problème difficile, vous commencerez sûrement par vous attaquer à une forme plus simple de ce problème. C'est l'occasion d'en découvrir les difficultés, mais, par petits morceaux, pas toutes en même temps ou, du moins, dans un cadre plus simple ou plus agréable que celui de l'énoncé initial. C'est une manière de faire apparaître des idées souvent fondamentales pour la preuve cherchée, en dégageant la lourdeur et parfois le superflu du cadre général et de son formalisme. Quand on commence à faire du vélo, on est tenu par quelqu'un ou deux roues sur les côtés. Quand on commence l'escalade, on ne s'attaque pas directement à la face nord de l'Everest. Il en va de même en mathématiques.
Quand on cherche en maths, d'une façon ou d'une autre, on commence souvent par se mettre dans un cadre plus simple. Attention toutefois à ne pas trop simplifier le problème car il risque de perdre toute sa substance et on n'en tirera pas grand-chose.

*Un premier exemple :* un pâtissier possède un gâteau triangulaire avec un nappage sur le dessus. Mais la boite qu'il a n'est pas bonne, c'est la symétrique (par rapport à une droite) de la boîte dont il a besoin pour mettre le gâteau, c'est à dire qu'il lui faudrait retourner le gâteau pour le faire entrer dans la boîte. Impossible à cause du nappage ! En deux coups de couteaux, il pourra couper son gâteau en trois morceaux et faire entrer le gâteau dans la boîte en bougeant les trois morceaux.
Essayez de trouver les deux coups de couteau. Pour cela on peut vous conseiller de commencer par supposer que le triangle est équilatéral, isocèle ou rectangle.

*Un autre exemple :* si on doit montrer une propriété pour tous les entiers, on commence par la vérifier pour les premiers entiers. On peut parfois voir pourquoi la propriété est vraie en général. Typiquement, si vous arrivez à propager la propriété d'un entier à l'entier suivant, vous pourrez montrer le résultat par récurrence.
Une image permettant de comprendre ce mécanisme est donnée par les dominos que l'on aligne les uns derrière les autres de façon à ce que la chute de l'un entraîne la chute du suivant. Il suffit alors de faire tomber le premier domino pour que tous tombent, l'un après l'autre. Montrer une propriété par récurrence revient à vérifier que le premier domino chute et que la chute de n'importe quel domino entraîne forcément la chute du domino suivant.

Terminons sur la blague suivante, qui implique des mathématiciens et peut illustrer cette idée.
*Blague :* trois mathématiciens ont l'habitude de voyager avec un seul billet de train pour trois, lorsqu'ils se rendent à un colloque. Ils croisent à un colloque de physique mathématique trois physiciens qui leur demandent comment ils font, quand le contrôleur vient les contrôler, pour ne pas être verbalisés. Les matheux répondent qu'ils vont discrètement tous les trois aux toilettes et glissent un seul billet sous la porte quand le contrôleur vient frapper. Au retour, les trois physiciens achètent un seul billet et les mathématiciens n'achètent pas de billet.
Comment font ils ? Lorsque le contrôleur approche et que les trois physiciens se précipitent dans les toilettes, ils attendent que la porte soit refermée et vont frapper à la porte en disant « Contrôle des billets », puis il se sont ramenés à la situation avec un billet de train, où ils savent quoi faire pour éviter la verbalisation (tandis que les physiciens sont expulsés du train ?)...

## 4) Chercher en partant de la solution (lorsqu'elle est donnée)

On nous a souvent dit qu'il ne fallait pas partir de la solution. Mais cela peut se révéler bien pratique. Imaginons (et c'est un peu vrai) qu'une preuve est un chemin à parcourir. Ce chemin est parfois difficile à trouver, un parcours dans la jungle avec quelques passages cachés, jusqu'au point d'arrivée : la conclusion. Et bien, en partant du point d'arrivée, il est possible que la solution apparaisse plus facilement.