Chapitre 1
MÉTHODES POUR DÉNOMBRER
(de façon efficace !)

On commence l'exploration du monde des probabilités par le dénombrement pour une raison très simple : si P est la probabilité uniforme sur un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ alors, pour tout événement A, on a :

$$P(A) = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}$$

Et voilà, il faut donc bien être capable d'évaluer $\operatorname{card}(A)$ et $\operatorname{card}(\Omega)$! Avec les quelques méthodes qu'on va voir, même les plus allergiques seront capable de s'en sortir haut la main . . . C'est parti les enfants !

Il s'agit le plus souvent de dénombrer le nombre de façons de procéder à une certaine expérience : lancer un dé ou plusieurs dés un certain nombre de fois, tirer un certain nombre de boules dans une urne en une seule poignée ou une par une, le contenu de l'urne pouvant évoluer d'un tirage au tirage suivant, fabriquer des mots à partir d'un certain alphabet et des règles de construction . . .

MÉTHODE 0 : Quelles sont les deux questions à se poser ?

Lorsque vous êtes en train de calculer le cardinal de n'importe quoi, n'oubliez jamais de vous poser régulièrement les deux questions que tout prof pose lorsqu'il accueille pour la première fois ses étudiants :
$\star$ Quelqu'un n'a pas été appelé ? Si la réponse est oui, c'est que le dénombrement n'est pas achevé.
$\star$ Y a-t-il des gens appelés plusieurs fois ? Si la réponse est oui c'est qu'une même personne pouvait choisir plusieurs options et qu'elle a été appelée sur la liste de chaque option . Il faut alors se référer à la méthode 4 pour apprendre comment ne pas compter les mêmes plusieurs fois, en espérant qu'il n'y a pas trop d'options différentes possibles !

Retenir : bien dénombrer c'est lister tout le monde, mais une fois et une seule, quitte à faire des sous-listes . . .

A) Combinaison, arrangement ou puissance ?

MÉTHODE 1 : Utiliser : Ordre/Répétition

❏ **Principe**

Quand le problème revient à compter des mots de longueur p donnée formés à partir d'un alphabet de cardinal n, tous les mots étant autorisés sans référence à un sens réel du mot, la répétition est donc possible et l'ordre compte (si a et b sont dans l'alphabet et $p = 2$, on doit distinguer les mots ab et ba et le mot aa existe), on dénombre avec des puissances. Il y a n^p mots possibles. L'ensemble des résultats possibles étant l'ensemble de toutes les p-listes des n lettres de l'alphabet.

❑ Mise en garde

n^p n'est pas à confondre avec p^n (sauf si $n = p$! !) (un grand classique !) !

Refaites tranquillement le raisonnement : j'ai au début n façons de choisir la première lettre d'un mot, puis **à chaque fois** n façons de choisir la deuxième lettre, donc $n \times n = n^2$ façons de choisir les deux premières lettres, puis à chaque fois encore n façons de choisir la troisième lettre, donc $n^2 \times n = n^3$ façons de choisir les trois premières lettres formant le début d'un mot et ceci jusqu'à choisir p fois une des n lettres.

Il y a donc $\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{p \text{ facteurs}} = n^p$ façons de procéder.

❑ Exemple

On met dix boules numérotées de 1 *à* 10 *dans une urne. On tire cinq fois une boule (au hasard) et avec remise de la boule obtenue à chaque fois avant le tirage suivant. Combien y-a-t-il de tirages possibles commençant par la boule numéro* 1 *et se terminant par la boule numéro* 10 *?*

> Pour le premier et le dernier tirage, on n'a qu'un seul choix (boule 1 au premier tirage et boule 10 au dernier tirage).
> Pour les trois autres tirages, on a 10^3 façons de faire (car répétition et ordre : on fait un tirage avec remise et on construit au centre un mot de longueur 3 et toutes les répétitions sont permises).
> On a donc en tout $1 \times 10^3 \times 1$ choix *i.e.* 1000 tirages possibles respectant les conditions.

MÉTHODE 2 : Utiliser : Ordre/Pas de répétition

❑ Principe

Quand la répétition n'est pas possible (vous jouez au scrabble et vous n'avez pas deux fois la même lettre sur votre réglette) et que l'ordre compte (on fabrique encore des mots ayant ou non un sens), on dénombre avec des « arrangements ».

Le nombre de mots de longueur p fabriqués à partir d'un alphabet de cardinal n, chaque mot ne contenant jamais deux fois la même lettre, est noté A_n^p.

On a :

$$A_n^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ n(n-1)\cdots(n-p+1) & \text{si } p \leqslant n \end{cases}$$

Notons que la deuxième forme est valide tout le temps, car, si $p > n$, elle contient un facteur nul !

Si $p \leqslant n$, on peut écrire pour abréger l'écriture :

$$A_n^p = \frac{n(n-1)\cdots)(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\cdots 1}{(n-p)(n-p-1)\cdots 1} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

❑ Mise en garde

De nouveau, pour éviter de raconter trop de bêtises, il est plus sage de refaire tranquillement le raisonnement suivant : si par exemple je procède à p tirages sans remise d'une boule d'une urne contenant initialement n boules discernables, j'ai au premier tirage n résultats possibles, puis au deuxième tirage, j'ai alors, quel que soit le résultat du premier tirage, $n-1$ résultats possibles (car le tirage est sans remise), donc $n(n-1)$ façons d'obtenir les deux premières boules, etc. jusqu'au $p^{\text{ème}}$ tirage où je n'ai plus que $n-p+1$ choix possibles, quels que soient les résultats antérieurs (et non pas $n-p$ choix comme on le retrouve trop souvent !).

Il y a donc en tout $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-p+1)$ façons de procéder, ce qui fait bien A_n^p possibilités.

❑ **Exemple**

Reprenons l'exercice précédent, avec un tirage sans remise.

> Le tirage est sans remise.
> Pour le premier et le dernier tirage, un seul choix (boule 1 au premier tirage, boule 10 au dernier).
> Pour le deuxième tirage, on a le choix parmi 8 boules (car la boule 1 et la boule 10 sont réservées), pour le troisième tirage, quel que soit le résultat du deuxième tirage, on a le choix parmi 7 boules et quels que soient les résultats des tirages de rang 2 et 3 il reste 6 boules disponibles pour le quatrième tirage.
>
> On a donc $A_8^3 = 8\times7\times6 = 336$ possibilités si on sait bien compter.

MÉTHODE 3 : Utiliser : Pas d'ordre/Pas de répétition

❑ **Principe**

Quand la répétition n'est pas possible et que l'ordre ne compte pas (typiquement, vous êtes en train de jouer au loto et sur votre carte il y a un certain nombre de cases cochées sans ordre (**vous** les avez cochées dans un certain ordre mais c'est sans intérêt pour le jeu), ou vous prenez 13 cartes d'un jeu de 52 cartes pour constituer une main au bridge, etc.), on utilise la notion de combinaison :

Pour n et p dans $\mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$, il y a $\binom{n}{p}$ façons de choisir une partie de cardinal p dans un ensemble de cardinal n et on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{1}{p!}A_n^p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p(p-1)\ldots1} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Il est d'usage de poser $\binom{n}{p} = 0$ lorsque l'on n'a pas $0 \leqslant p \leqslant n$, mais dans ce cas n'utilisez plus l'expression contenant des factorielles !

❑ **Rappel**

Quelques formules classiques faisant intervenir les combinaisons (on fait la convention annoncée : $\binom{n}{p} = 0$ si $p \notin [\![0,n]\!]$) :

1. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

2. Si $1 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$

(Regardez la forme de cette formule, il n'y a pas vraiment d'effort de mémoire à faire ! Cette formule est toute bête mais vraiment souvent utile dans un bon nombre de formules sommatoires.)

3. **Formule de Pascal**

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

4. **Formule des colonnes du triangle de Pascal**

$$\binom{i}{i} + \binom{i+1}{i} + \binom{i+2}{i} + \cdots + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i+1}$$

5. **Formule du binôme de Newton**

$$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \forall\, n \in \mathbb{N}, (z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$$

6. **Formule de Vandermonde** (en un seul mot)

$$\forall\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k} = \binom{n_1+n_2}{n}$$

Cette dernière formule, très utile pour les phénomènes binomiaux, est une conséquence de la formule ... du binôme de Newton.

Il suffit d'écrire :

$$(1+X)^{n_1+n_2} = (1+X)^{n_1}(1+X)^{n_2}$$

et de développer pour calculer de deux façons le terme en X^n de ce polynôme (sans oublier la convention de nullité concernant les coefficients binomiaux ; en particulier si $n > n_1 + n_2$, il n'y a vraiment rien à faire !).

Pour une démonstration des autres formules, voir votre cours préféré ...

❏ **Exemple**

Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

Dénombrer le nombre de p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'éléments de $[\![1, n]\!]$ tels que : $1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_p \leqslant n$ (au lieu de parler de p-uplet on parle aussi de p-liste).

Pour former un p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in [\![1, n]\!]^p$ strictement croissant, il faut et il suffit de :

1. Choisir p éléments non ordonnés (il n'y a pas le premier, le deuxième, ..., on les prend tous en même temps) de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire une partie de cardinal p de $[\![1, n]\!]$. On a donc $\binom{n}{p}$ choix pour cette première étape.

2. Ranger ces p éléments dans l'ordre croissant. Là, on n'a qu'un choix (nécessairement, le premier élément sera le plus petit des p éléments de la première étape, le deuxième sera le plus petit des $p-1$ qui restent, ...).

Au final, il y a donc $\binom{n}{p} \times 1 = \binom{n}{p}$ éléments de $[\![1, n]\!]^p$ formant une séquence strictement croissante.

Notez que c'est ce que **vous** faites naturellement lorsque vous jouez aux cartes : vous recevez une **partie** de l'ensemble des cartes (il est très rare que la règle d'un jeu de cartes impose un ordre sur celles-ci) et c'est vous qui décidez de ranger votre jeu dans un certain ordre pour y voir plus clair.

B) Les grandes tactiques classiques

MÉTHODE 4 : On distingue les cas = formule de Poincaré

❑ **Rappel**

Prenons E un ensemble fini et $A, B, C, A_1, \ldots, A_n$ (n entier naturel non nul) des parties de E alors $A \cup B$, $A \cup B \cup$ et $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ sont des ensembles finis et :

$\star$ $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

$\star$ $\text{card}(A \cup B \cup C) = a - b + c$, avec :

$$\begin{cases} a = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) \\ b = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(A \cap C) + \text{card}(B \cap C) \\ c = \text{card}(A \cap B \cap C) \end{cases}$$

$\star$ $\text{card}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = a_1 - a_2 + a_3 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n$, avec :

$$\begin{cases} a_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \text{card}(A_i) \\ a_2 = \sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2})) \\ \qquad \ldots \\ a_n = \text{card}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \end{cases}$$

(a_k est donc la somme des intersections k à k des parties A_i)

Cette grosse formule horrible s'appelle la formule du crible ou de Poincaré.

Elle est loin d'être pratique (on se retrouve avec n sommes à calculer et probablement pas jolies jolies !). Avant de vous lancer dans cette formule, commencez donc par regarder s'il n'y a pas une façon plus sympa de parcourir les différents cas possibles.
En particulier l'idéal, auquel on cherche à se ramener, est que les parties A_i forment une partition de l'ensemble dont on cherche le cardinal, car on a :

1. Si A et B vérifient $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$, on a alors :
$$\text{card}(E) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

2. Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est une partition de E, c'est-à-dire (pour ceux qui n'auraient pas bien bossé leur cours) si $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = E$ et si pour tout (i, j) tel que $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $A_i \cap A_j = \emptyset$), alors :
$$\text{card}(E) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}(A_i)$$

Retenons donc :

MÉTHODE 4 le retour : On utilise une partition = diviser pour régner

❑ **Principe**

Pour dénombrer l'ensemble E qui nous intéresse, on le sépare en parties $A_1, \ldots, A_k$ vérifiant $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ et $E = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. On a alors :

$$\text{card}(E) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \cdots + \text{card}(A_k)$$

La condition $A_1 \cup \ldots \cup A_k = E$ signifie que vous n'oubliez personne et la condition $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ signifie que vos cas ne se recoupent pas (on ne compte pas plusieurs fois le même objet).

❏ Cas d'utilisation

Cette tactique est particulièrement efficace quand on n'arrive pas à dénombrer E directement mais qu'on arrive à voir des sous-parties auxquelles on peut donner des propriétés intéressantes (on peut par exemple découper E en classant des parties suivant certaines caractéristiques, selon leur cardinal, leur plus grand élément, le nombre de pattes, ...).

❏ Exemple

On lance trois dés classiques (pas ceux des jeux de rôles à vingt faces mais ceux des petits chevaux) de la même couleur et de la même taille. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?

On appelle E l'ensemble des résultats. On va découper E en trois sous-parties A, B et C constituant une partition de E.
A est l'ensemble des résultats pour lesquels les trois dés ont donné le même résultat.
B est l'ensemble des résultats pour lesquels deux dés **exactement** ont donné le même résultat et C l'ensemble des résultats pour lesquels les trois dés ont donné trois résultats distincts.
$\{A, B, C\}$ est bien une partition de E (bien faire attention au mot exactement dans la définition de B qui permet de s'assurer que $C \cap B = \emptyset$).
Dénombrons A, B et C :

• Pour créer un élément de A, il faut (et il suffit de) choisir un chiffre compris entre 1 et 6 qu'on attribue aux trois dés, on a donc 6 choix. On en déduit que $\text{card}(A) = 6$.

• Pour créer un élément de B, il faut (et il suffit de) choisir un chiffre compris entre 1 et 6 qu'on attribue aux deux dés ayant le même résultat (on a donc 6 choix) puis on choisit un autre résultat pour l'autre dé (on a donc alors 5 choix). On en déduit que $\text{card}(B) = 6 \times 5 = 30$.

Bien faire attention au fait qu'il ne faut pas confondre les résultats $(1, 1, 2)$ et $(1, 2, 2)$: on ne se contente pas de choisir deux numéros parmi 6, il faut aussi savoir lequel est doublé.

• Pour créer un élément de C, il faut (et il suffit de) choisir trois chiffres compris entre 1 et 6 sans les ordonner (car on ne discerne pas entre eux les dés, $(1, 2, 3)$ ou $(3, 2, 1)$, c'est ici le même résultat), on a donc $\binom{6}{3} = 20$ choix d'où $\text{card}(C) = 20$.

On en déduit que :

$$\text{card}(E) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) = 6 + 30 + 20 = 56.$$

Si vous avez un peu de mal avec cette notion, on vous conseille l'excellent exercice de ce chapitre : celui avec les diamants ... So chic !

MÉTHODE 5 : On fait le contraire de ce qu'on nous dit !

Eh bien, c'est malin ! Ah, les jeunes de maintenant !

❏ Principe

On cherche $\operatorname{card}(A)$ avec A partie d'un ensemble E fini. On sait que :

$$\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(\overline{A}),$$

où $\overline{A}$ est le complémentaire dans E de A. Au lieu de chercher $\operatorname{card}(A)$, on cherche donc $\operatorname{card}(\overline{A})$ puis on se sert de la formule précédente.

❏ Cas d'utilisation

La Palice aurait dit : quand $\operatorname{card}(\overline{A})$ est plus facile à calculer que $\operatorname{card}(A)$ et que l'on connaît $\operatorname{card} E$! Pensez-y en particulier avec des expressions du type « au moins » ou « au plus ». Par passage au complémentaire, « au moins » devient « strictement moins de » et « au plus » « strictement plus de » . . . et c'est parfois plus simple à expliciter !

❏ Exemple

Dans un jeu de 52 *cartes, dénombrez les mains de* 5 *cartes ayant au moins* 2 *cœurs.*

> Certains pensent que c'est $\binom{13}{2}\binom{50}{3}$ en disant : on prend deux cœurs puis on complète la main en prenant 3 cartes parmi les 50 autres cartes). Eh bien c'est faux, vous tombez alors dans un piège classique du dénombrement qui consiste à compter plusieurs fois le même objet. Si on prend par exemple la main « 2 de cœur, 3 de cœur, 4 de cœur, 2 de trèfle, 3 de trèfle », on va la compter dans : « On prend deux cœurs (2 de cœur, 3 de cœur) et on complète (4 de cœur, 2 de trèfle, 3 de trèfle) » mais aussi dans « on prend deux cœurs (2 de cœur, 4 de cœur) et on complète (3 de cœur, 2 de trèfle, 3 de trèfle) » . . . You understand the problem ?
>
> On note E l'ensemble des mains de cinq cartes et A celles ayant au moins deux cartes à cœur. $\overline{A}$ est alors l'ensemble des mains de cinq cartes ayant **au plus** une carte à cœur, *i.e.* contenant 1 ou 0 coeur. D'où en utilisant la méthode 4 :
>
> • Il y a $\binom{39}{5}$ mains ne contenant aucun coeur (on choisit 5 cartes, sans répétition et sans ordre parmi les 39 « non-cœur ».
>
> • Il y a $\binom{13}{1}\times\binom{39}{4}$ mains contenant exactement un cœur (on choisit un cœur et on complète avec 4 cartes parmi celles qui ne sont pas des cœurs).
>
> $$\operatorname{card} A = \operatorname{card} E - \operatorname{card}(\overline{A}) = \binom{52}{5} - \left[\binom{39}{5} + \binom{13}{1}\binom{39}{4}\right]$$
>
> (On vous laisse compter, à nous ça nous fend le cœur . . .)

MÉTHODE 6 : On effectue une succession d'étapes

❏ Rappel

Si A et B sont deux ensembles finis, on a $\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card}(A)\times \operatorname{card}(B))$.

❏ Principe

On va décrire par succession les objets qui composent l'ensemble E qu'on veut dénombrer.

Votre raisonnement doit ressembler à ça :

Pour construire un élément de E, il faut et il suffit de :

$\rightarrow$ d'abord faire ceci, on peut le faire de a façons.

$\rightarrow$ Puis une fois qu'on a fait l'étape précédente, on fait cela et on a b façons de le faire quel que soit le résultat de la première étape
$\rightarrow$ etc.
On est en train de décrire un arbre équilibré. Après il suffit de multiplier. Soyez rigoureux, votre succession doit décrire précisément tous les éléments de E. Si vous voulez compter un nombre de pattes, vous pouvez commencer par compter le nombre de bestioles, mais si elles n'ont pas toutes le même nombre de pattes, cela ne fera pas vraiment avancer le bidule. Le dénombrement, c'est précis, ce n'est pas le grand bazar !

❏ **Mise en garde**

On vient de le dire, si le nombre de cas à la deuxième étape dépend de sous-cas de la première étape, autant dire que ça va être un peu plus compliqué et qu'il va falloir utiliser d'abord la méthode 4, puis la méthode 6 pour chaque sous-cas. . . S'il y a trop de sous-cas, mieux vaut alors ordonner différemment les choses ou changer de méthode !

❏ **Exemple**

On a sur sa réglette de scrabble 10 *lettres différentes dont* 4 *voyelles (et* 6 *consonnes !). Combien peut-on former de mots de* 5 *lettres comportant* 2 *de ces voyelles et* 3 *de ces consonnes (un mot n'ayant pas nécessairement une signification...).*

Alors, on peut raisonner de plusieurs façons... En voici une :

Pour former un mot de 5 lettres avec 2 voyelles et 3 consonnes, il faut et il suffit de :

1. Choisir les 2 voyelles de manière non ordonnée (donc $\binom{4}{2} = 6$ choix).

2. A chaque fois que les voyelles sont choisies, choisir les 3 consonnes de manière non ordonnée (donc $\binom{6}{3} = 20$ choix).

3. A chaque fois que les lettres sont choisies, choisir la place de la première voyelle (dans l'ordre alphabétique) de 5 façons (les mots sont de longueur 5), puis à chaque fois choisir la place de la deuxième voyelle de 4 façons.

4. A chaque fois que tout ceci est fait, il reste à placer les trois consonnes aux trois places libres, ce qui peut se faire de $A_3^3 = 3! = 6$ façons.

Pour illustrer ces étapes, on peut prendre un exemple concret de mot créé. Imaginons partir des lettres suivantes :

$$A, E, I, O, B, C, D, F, P, R.$$

Super, on joue aux chiffres et aux lettres . . . Emissions que vous ne connaissez pas si vous n'avez pas 60 ans et que vous n'êtes donc pas France3-addict . . . Reprenons pour nos jeunes de Nrj12.

A la première étape, on choisit les voyelles A et O, puis on choisit les consonnes B, P, R, puis on décide de prendre la dernière place pour le A et la troisième pour le O.
A la dernière étape il reste à placer (en les ordonnant) les consonnes aux places libres, disons par exemple dans l'ordre P, R, B. On vient de constituer le mot : $P.R.O.B.A$ Proba ! Comme MéthodiX Proba, ce n'est pas génial ?

Bon bref, il y a donc $\binom{4}{2} \times \binom{6}{3} \times 5 \times 4 \times 3!$ mots adéquats (et là, on vous laisse taper comme des petits dingos que vous êtes sur votre calculatrice préférée !).