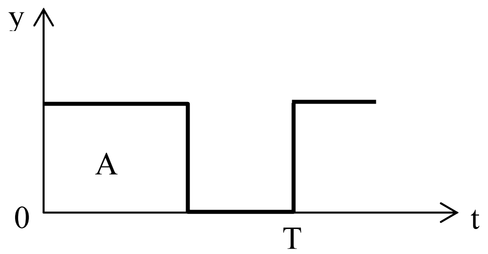
GRANDEURS PERIODIQUES. CIRCUITS LINEAIRES EN REGIME SINUSOIDAL

1. Propriétés des grandeurs périodiques



La valeur moyenne d'une grandeur périodique y de période T, notée < y >, est définie par :

$$\boxed{< y > = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt = \frac{A}{T}}$$

avec A : aire comprise entre la courbe y(t) et l'axe des temps pendant la période T.
Remarque : si le signal est alternativement positif et négatif sur la période T, l'aire A est égale à : $A = A_1 - A_2$ avec A_1 l'aire au dessus de l'axe des abscisses et A_2 l'aire en dessous de l'axe.

– La valeur efficace d'une grandeur périodique de période T, notée Y, est définie par :

$$\boxed{Y = \sqrt{< y^2 >}\text{, avec } < y^2 > = \frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)\,dt}$$

Remarque : pour des signaux carrés ou triangles, on peut calculer la valeur efficace par la méthode des aires. Pour cela :

- On élève l'amplitude du signal au carré. On représente $y^2(t) = f(t)$;
- On calcule sa valeur moyenne par la méthode des aires : $< y^2 > = \frac{A}{T}$;
- On extrait la racine carrée du résultat : $\sqrt{< y^2 >} = Y$.

2. Régime sinusoïdal

– Valeur instantanée d'une tension sinusoïdale :

$$\boxed{u(t) = U_{max}\sin(\omega t + \varphi_u)}$$

avec $\omega = 2\pi f$ ($rad.s^{-1}$) pulsation de la tension et U_{max} son amplitude. φ_u est la phase de la tension à l'origine.
– Valeur moyenne et efficace d'une tension sinusoïdale :

$$\boxed{< u > = 0 \text{ et } U = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}}$$

Remarques :

- la valeur instantanée d'une tension sinusoïdale s'écrit aussi :

$$u(t) = U\sqrt{2}\ \sin(\omega t + \varphi_u)$$

- les définitions précédentes sont valables quelle que soit la nature de la grandeur sinusoïdale.

– Les différentes puissances en régime sinusoïdal sont :

$P = U\,I\cos\varphi$: puissance active (W) ;
$Q = U\,I\sin\varphi$: puissance réactive (VAR) ;
$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$: puissance apparente (V.A) ;

– Le facteur de puissance f_p est égal à : $f_p = \cos\varphi = \dfrac{P}{S}$.

– Théorème de Boucherot : les puissances actives et réactives absorbées par un groupement de récepteurs sont respectivement égales à la somme des puissances actives et réactives absorbées par chaque récepteur.

3. Etude des circuits linéaires

– Un circuit est dit linéaire s'il est uniquement formé de dipôles linéaires (dipôles R, L et C par exemple).

– Les lois du courant continu sont applicables aux régimes variables, à condition de les écrire en valeurs instantanées (par exemple les lois des nœuds ou des mailles).

– En régime sinusoïdal, l'étude des circuits se fait en appliquant les lois du continu aux valeurs instantanées ou à leurs grandeurs associées : nombres complexes (diviseur de tension ou de courant, théorèmes de Thévenin, de Norton et de superposition) et vecteurs de Fresnel (solutions graphiques).

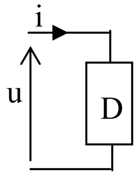
a) Etude des circuits linéaires

A chaque grandeur sinusoïdale (tension ou courant) on peut associer un vecteur de Fresnel et un nombre complexe. Par exemple à la tension $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u)$, on associe :

Le vecteur $\vec{U} = \left[\|\vec{U}\|;\varphi_u\right]$ et le nombre complexe $\underline{U} = [U;\varphi_u]$ (en notation polaire).

Le nombre complexe $\underline{U}$ a pour module la valeur efficace U, et pour argument la phase à l'origine φ_u.

b) Impédance d'un dipôle linéaire



$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = [Z;\varphi] = R + jX}$$

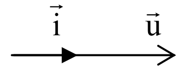
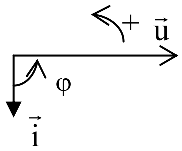
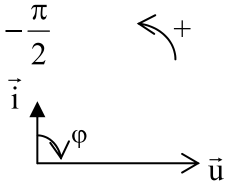
avec :

- le module de $\underline{Z}$ noté Z égal à : $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \dfrac{U}{I}$;
- l'argument de $\underline{Z}$ noté φ (qui représente le déphasage $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ du courant par rapport à la tension à l'alimentation du dipôle) donné par la relation : $\tan\varphi = \dfrac{X}{R}$.

Remarque : on définit l'admittance complexe $\underline{Y}$ comme l'inverse de l'impédance $\underline{Z}$:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

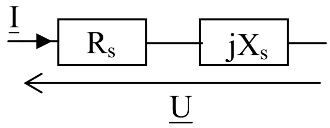
c) Cas des dipôles élémentaires

Composants	Relations	Impédances	Puissances	Diagrammes de Fresnel
Résistor	$\underline{U} = R\underline{I}$	$\underline{Z} = R = [R\ ;\ 0]$	$P = RI^2$ $Q = 0$	$\varphi = 0$ 
Bobine idéale	$\underline{U} = jL\omega\underline{I}$	$\underline{Z} = jL\omega = \left[L\omega ; \dfrac{\pi}{2}\right]$	$P = 0$ $Q = L\omega I^2$	$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ 
Condensateur idéal	$\underline{U} = \dfrac{\underline{I}}{jC\omega}$	$\underline{Z} = \dfrac{1}{jC\omega} = \left[\dfrac{1}{C\omega} ; -\dfrac{\pi}{2}\right]$	$P = 0$ $Q = -U^2C\omega$	$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ 

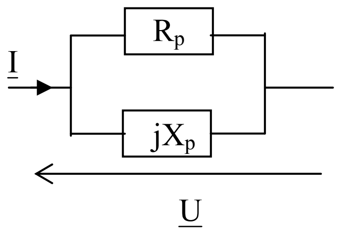
d) Transformation série-parallèle

– A tout dipôle linéaire passif correspond soit un modèle :

- série d'impédance complexe : $\underline{Z_s} = R_s + jX_S$



- parallèle d'admittance : $Y_p = \dfrac{1}{Z_p} = \dfrac{1}{R_p} + \dfrac{1}{jX_p}$



– Expression du coefficient de qualité : $Q = \dfrac{X_s}{R_s} = \dfrac{R_p}{X_p}$.

– Relation entre R_s et R_p, X_s et X_p et Q :

$$\boxed{R_p = R_s\,(1 + Q^2)} \text{ et } \boxed{X_p = X_s\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)}$$

Remarque : pour des valeurs de Q supérieures à 10, on peut adopter les relations suivantes :

$$\boxed{R_p = Q^2\,R_s} \text{ et } \boxed{X_p = X_s}$$

QUADRIPOLES LINEAIRES EN REGIME SINUSOÏDAL. FILTRES

1. Caractéristiques des quadripôles linéaires

− Un quadripôle est un organe de liaison : il est passif s'il échange avec l'extérieur uniquement de l'énergie par effet Joule ; sinon il est actif.

a) Impédance d'entrée

Appelons u_e la tension d'entrée et i_e l'intensité du courant d'entrée. L'impédance d'entrée est égale à :

$$\boxed{\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}_e}{\underline{I}_e}}$$

Remarque : l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e$ dépend souvent de la charge du quadripôle (comme l'intensité du courant d'entrée i_e).

b) Impédance de sortie

Pour la charge, le quadripôle se comporte comme un dipôle actif linéaire et peut-être représenté par un modèle équivalent de Thévenin (le plus souvent) ou de Norton.

Soit avec un modèle équivalent de Thévenin : $\underline{U}_s = \underline{U}_{s0} - \underline{Z}_s \underline{I}_s$

- $\underline{U}_{s0}$ est la tension à vide du quadripôle ;
- $\underline{Z}_s = \frac{\underline{U}_s}{\underline{I}_S}$ lorsque $\underline{E}_G = 0$ (le dipôle générateur d'entrée est "éteint" c'est-à-dire court-circuité). $\underline{Z}_s$ est l'impédance de sortie du quadripôle.

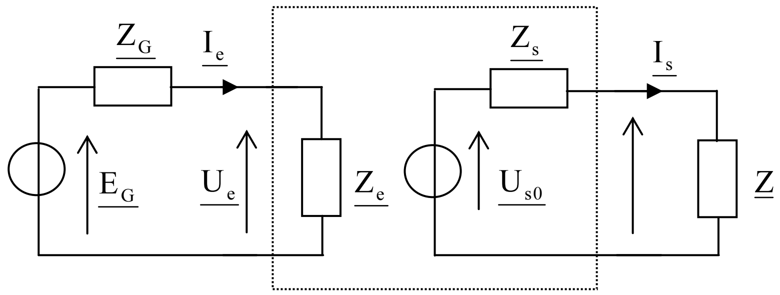
Remarque : l'impédance de sortie $\underline{Z}_s$ dépend de l'impédance interne $\underline{Z}_G$ du générateur d'entrée.

c) Fonction de transfert

Dans le cas des petits signaux, si à la grandeur d'entrée sinusoïdale correspond une grandeur de sortie sinusoïdale, la transmittance complexe du quadripôle est le rapport :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}}$$

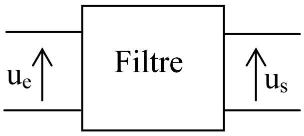
d) Modèle du quadripôle linéaire



2. Les filtres

Les filtres sont des quadripôles linéaires qui éliminent des signaux de fréquences électriques indésirables. Ils ne transmettent que des signaux dans une plage de fréquence appelée bande passante du filtre.

L'étude du filtre se fait en régime sinusoïdal avec la notation complexe.



La fonction de transfert du filtre est :

$$\boxed{\underline{T} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \left[\left|\underline{T}\right|;\arg\left(\underline{T}\right)\right]}$$

– Le gain du quadripôle est : $G = 20\log\left(\left|\underline{T}\right|\right)$.

– On appelle bande passante à –3 dB d'un quadripôle, l'intervalle de fréquence $[f_i, f_s]$ pour lequel le gain G est : $G \geq G_{max} - 3$ dB.

– On appelle f_i la fréquence de coupure inférieure et f_s la fréquence de coupure supérieure. Le gain G_{max} est la valeur maximale que peut prendre le gain G.

Remarque : à une diminution du gain G de 3 dB (par rapport au gain maximal G_{max}) correspond une atténuation du module de la fonction de transfert T de $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Autrement dit :

$$\boxed{G = G_{max} - 3\text{ dB} \Leftrightarrow \left|\underline{T}\right| = \frac{\left|\underline{T}\right|_{max}}{\sqrt{2}}}$$

a) Filtres du premier ordre

– Filtres passe-bas : la fonction de transfert est de la forme :

$$\boxed{\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{T_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

La bande passante à –3 dB est : $[0, f_0]$ avec $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ fréquence de coupure à –3 dB.

– Filtre passe-haut : la fonction de transfert est de la forme :

$$\boxed{\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{T_0}}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}}$$

La bande passante à –3 dB est : $[f_0, \infty]$ avec $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ fréquence de coupure à –3 dB.

b) Filtre du second ordre

– Filtre passe bande : la fonction de transfert est de la forme :

$$\boxed{\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{T_0}}{1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

avec ω_0 pulsation correspondant à la résonance et Q_0 facteur de surtension.

La bande passante à –3 dB est : $\Delta f = f_s - f_i = \frac{f_0}{Q_0}$.

AMPLIFICATEUR OPERATIONNEL PARFAIT. APPLICATIONS

1. Modèle équivalent

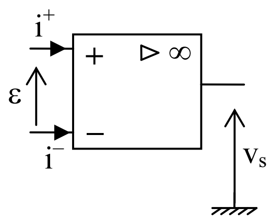
a) Caractéristiques principales. Schéma équivalent.

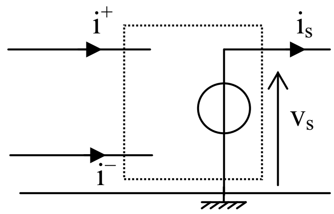
– Les intensités des courants d'entrée sont nulles (la résistance d'entrée différentielle R_e est infinie).

– La résistance de sortie R_s est nulle.

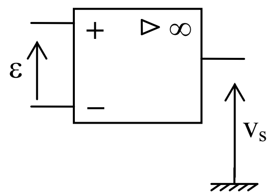
– Le coefficient d'amplification différentiel A_d est supposé infini.

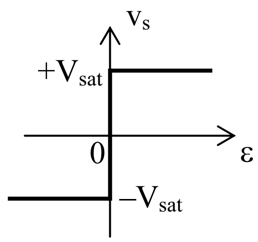
D'où le schéma équivalent de l'A.O. parfait :





b) Fonction de transfert $v_s = f(\varepsilon)$

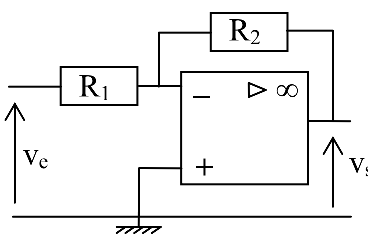




2. Applications linéaires (A.O. parfaits)

La sortie de l'A.O. est reliée à l'entrée inverseuse «–» (contre-réaction) : le fonctionnement est stable et on peut négliger la tension d'entrée différentielle ($\varepsilon = 0$).

a) Amplificateur inverseur



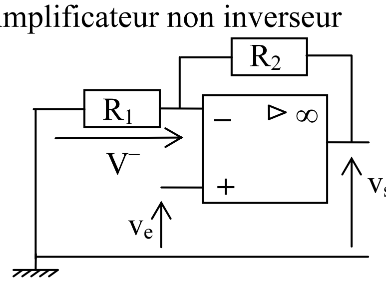
En appliquant le théorème de superposition, on calcule le potentiel de l'entrée inverseuse notée V^- :

$$V^- = v_e \frac{R_2}{R_1 + R_2} + v_S \frac{R_1}{R_1 + R_2} = V^+ = 0 .$$

On en déduit la fonction de tranfert :

$$\boxed{\frac{v_s}{v_e} = -\frac{R_2}{R_1}}$$

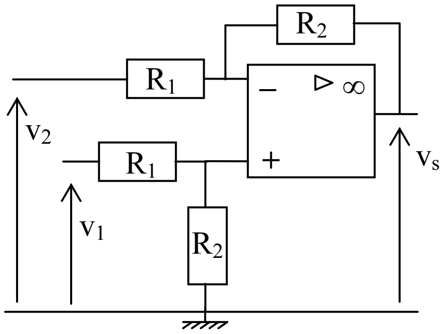
b) Amplificateur non inverseur



Calcul de V^- : $V^- = v_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} = v_e$ (diviseur de tension). On en déduit la fonction de transfert :

$$\boxed{\frac{v_s}{v_e} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}$$

c) Amplificateur de différence



Calcul de V^- :

$$V^- = v_2 \frac{R_2}{R_1 + R_2} + v_S \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

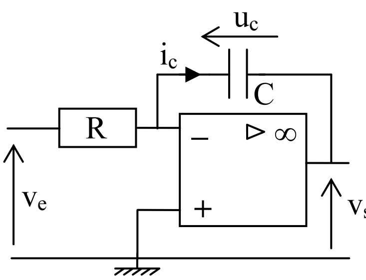
Calcul du potentiel de l'entrée non inverseuse :

$$V^+ = v_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \text{ (diviseur de tension).}$$

$V^+ = V^-$; on en déduit la fonction de transfert :

$$\boxed{v_s = \frac{R_2}{R_1}(v_1 - v_2)}$$

d) Intégrateur

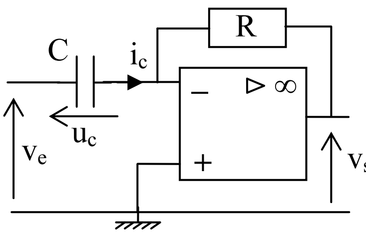


D'après la loi des mailles : $v_e = Ri_c$ et $v_s = -u_c$.

D'autre part : $i_c = C\frac{du_c}{dt}$. En combinant ces trois équations, on trouve la fonction de transfert :

$$\boxed{v_s = -\frac{1}{RC}\int v_e \, dt}$$

e) Dérivateur



D'après la loi des mailles : $v_e = u_c$ et $v_s = -Ri_c$.

Or : $i_c = C\frac{du_c}{dt}$. La fonction de transfert est égale à :

$$\boxed{v_s = -RC\frac{dv_e}{dt}}$$

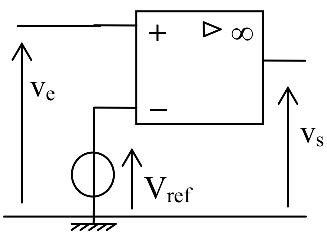
3. Applications non linéaires : montages comparateurs

La sortie n'est reliée à aucune des deux entrées ou à l'entrée positive notée E^+ : v_s ne peut prendre que 2 valeurs suivant le signe de ε :

- si $\varepsilon > 0$ alors $v_s = +V_{sat}$;
- si $\varepsilon < 0$ alors $v_s = -V_{sat}$.

a) Comparateur simple

exemple : comparateur non inverseur.

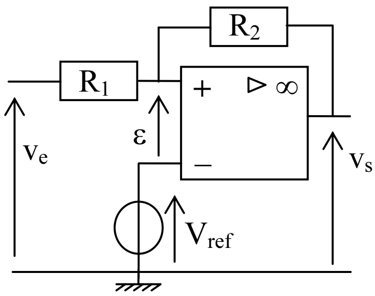


Si :

$v_e > V_{ref}$ alors $v_s = +V_{sat}$;

$v_e < V_{ref}$ alors $v_s = -V_{sat}$

b) Comparateur non inverseur à deux seuils (hystérésis)



On calcule le potentiel de la borne positive noté V^+ (par superposition). Puis on exprime la tension d'entrée différentielle $\varepsilon = V^+ - V_{ref}$. D'où :

$$\varepsilon = v_e \frac{R_2}{R_1 + R_2} + v_S \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V_{ref} \quad (1)$$

On cherche maintenant les deux tensions de seuil de basculement U^+ et U^- :

Si $\varepsilon < 0$ alors $v_s = -V_{sat}$. De l'expression (1), on déduit : $U^+ = \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{ref} + \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$.

Si $\varepsilon > 0$ alors $v_s = +V_{sat}$. De l'expression (1), on déduit : $U^- = \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{ref} - \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$.

La caractéristique de transfert est représentée ci-dessous :