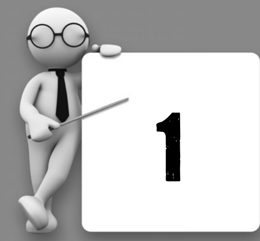
Prouver une inégalité



Quand on ne sait pas !

- On rappelle les règles de signes suivantes :

Signe de a	Signe de b	Signe de $a \times b$	Signe de a/b	Signe de $a+b$
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$	$-$	inconnu
$-$	$+$	$-$	$-$	inconnu
$-$	$-$	$+$	$+$	$-$

- Les 3 identités remarquables classiques sont à connaître. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \quad ; \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \quad ; \quad a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$$

- Les opérations suivantes sur les 2 membres de l'inégalité gardent le sens des inégalités :
  — Ajouter un réel quelconque α : si $x \leqslant y$, alors $x+\alpha \leqslant y+\alpha$.
  — Multiplier par un réel positif α : si $x \leqslant y$ et $\alpha \geqslant 0$, alors $\alpha x \leqslant \alpha y$.
  — Ajouter des inégalités : si $x \leqslant y$ et $a \leqslant b$, alors $x+a \leqslant y+b$.
  — Multiplier des inégalités de nombres positifs :
  si $0 \leqslant x \leqslant y$ et $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $xa \leqslant yb$.
  — Composer chaque membre par une fonction croissante : si f est croissante sur un intervalle I et si $x, y \in I$ sont tels que $x \leqslant y$, alors $f(x) \leqslant f(y)$.
  Fonctions croissantes de référence : exp sur $\mathbb{R}$, ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Les opérations suivantes sur les 2 membres de l'inégalité renversent le sens des inégalités :
  — Multiplier par un réel négatif α : si $x \leqslant y$ et $\alpha \leqslant 0$, alors $\alpha x \geqslant \alpha y$.
  — Passer à l'inverse dans des inégalités de nombres de même signe :
  si $0 < x \leqslant y$, alors $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$; si $x \leqslant y < 0$, alors $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$.
  Attention, si x et y sont de signes opposés alors on ne peut pas passer à l'inverse dans l'inégalité $x \leqslant y$.
  Par ailleurs on ne peut pas diviser des inégalités (même de nombres positifs) : si nécessaire il faut procéder en deux temps avec passage à l'inverse puis multiplication (voir la question 3 de l'exemple traité).

— Composer chaque membre par une fonction décroissante : si f est décroissante sur un intervalle I et si $x, y \in I$ sont tels que $x \leqslant y$, alors $f(x) \geqslant f(y)$.
Fonction décroissante de référence : $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_-$.

- On retiendra qu'il faut toujours être prudent lorsque l'on passe au carré dans une inégalité :
  - — Si $0 \leqslant x \leqslant y$, alors $x^2 \leqslant y^2$.
  - — Si $x \leqslant y \leqslant 0$, alors $x^2 \geqslant y^2$.
  - — Si $x \leqslant 0 \leqslant y$, alors il n'est pas possible de passer au carré dans l'inégalité.

Que faire !

Pour comparer deux nombres A et B :

- Dans de nombreux cas, on étudie le signe de la différence $A - B$. Pour cela :
  - — Il arrive que le signe de $A - B$ s'obtienne par une étude directe en factorisant l'expression ou en la réduisant au même dénominateur (il est toujours plus simple d'étudier le signe d'un produit ou d'un quotient que d'une somme ou d'une différence). Les identités remarquables rappelées dans la partie précédente peuvent être utiles !
  - — Si l'on doit comparer deux nombres $A(x)$ et $B(x)$ avec x un réel appartenant à un certain intervalle I, on peut aussi tenter d'étudier la fonction $f : x \mapsto A(x) - B(x)$, le signe de f sur I pouvant souvent se déduire de son tableau de variation.
- Toujours dans le cas où l'on doit prouver que $A(x) \leqslant B(x)$ avec x un réel appartenant à un certain intervalle I, on peut aussi partir de l'information connue sur x (par exemple $x \geqslant 0$ si $I = [0, +\infty[$, ou $1 \leqslant x \leqslant 2$ si $I = [1, 2]$) pour établir de proche en proche par opérations successives l'inégalité $A(x) \leqslant B(x)$.

Conseils

- Les valeurs approchées suivantes sont utiles : $e \approx 2{,}7$; $\ln(2) \approx 0{,}7$; $\sqrt{2} \approx 1{,}4$.
- Il faut aussi connaître les inégalités suivantes :

$$\forall x \geqslant 1,\ \ x^n \geqslant 1 \qquad\qquad \forall x \in [0,1],\ \ 0 \leqslant x^n \leqslant 1$$

$$\forall x \geqslant 0,\ \ e^x \geqslant 1 \qquad\qquad \forall x \leqslant 0,\ \ 0 < e^x \leqslant 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \ -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$$

- Il existe d'autres méthodes plus sophistiquées permettant d'établir des inégalités :
  - — Une démonstration par récurrence pour comparer deux expressions A_n et B_n pour tout entier naturel n (fiche 5).
  - — La « comparaison des images » pour encadrer la solution d'une équation (fiche 48).
  - — Les inégalités des accroissements finis (fiche 55).
  - — Les inégalités de convexité (fiche 79).

Exemple traité

1 Comparer les nombres $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{8}$.

2 Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ (1+x)^2 \geqslant 4x$.

3 Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{3} \leqslant \frac{2+\cos(x)}{2+\sin(x)} \leqslant 3$.

4 Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2\ln(x) < x$.

SOLUTION

1 On étudie le signe de la différence en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{2}{7}-\frac{3}{8}=\frac{2\times 8}{7\times 8}-\frac{3\times 7}{8\times 7}=\frac{16-21}{56}=-\frac{5}{56}\leqslant 0 \quad \text{d'où : } \frac{2}{7}\leqslant\frac{3}{8}$$

2 On étudie le signe de la différence. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(1+x)^2-4x=(1+2x+x^2)-4x=1-2x+x^2=(1-x)^2\geqslant 0$$

Ainsi : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ (1+x)^2 \geqslant 4x$.

3 On a : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, donc : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant 2+\cos(x) \leqslant 3$.
De même : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ 0 < 1 \leqslant 2+\sin(x) \leqslant 3$.
Par inverse, il vient : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{1} \geqslant \frac{1}{2+\sin(x)} \geqslant \frac{1}{3}$.
Ainsi : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant 2+\cos(x) \leqslant 3$ et $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2+\sin(x)} \leqslant 1$.
En multipliant ces inégalités de nombres positifs, on obtient le résultat demandé :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \frac{1}{3} \leqslant \frac{2+\cos(x)}{2+\sin(x)} \leqslant 3$$

4 On étudie les variations de la fonction $f : x \mapsto 2\ln(x) - x$ pour en déduire son signe.
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ f'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$$

On observe que $f'(x)$ est du signe de $2-x$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$2\ln(2)-2$	$\searrow$	

Or $\ln(2) \approx 0{,}7$, donc : $2\ln(2) - 2 \approx 1{,}4 - 2 < 0$.
On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \leqslant 2\ln(2) - 2 < 0$.
Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $2\ln(x) - x < 0$, et finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $2\ln(x) < x$.
Notons qu'il n'a pas été nécessaire de calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Exercices

EXERCICE 1.1

1 Comparer les nombres $\dfrac{1}{\ln(2)}$ et $\dfrac{2}{\ln(3)}$, ainsi que les nombres $\dfrac{e-1}{2e-3}$ et 1.

2 Encadrer les réels $\sqrt{29}$ et $\dfrac{16-\sqrt{73}}{3}$ par deux entiers consécutifs.

EXERCICE 1.2

1 Prouver que : $\forall x \in]3, +\infty[,\ \dfrac{7x-18}{2x-5} > 3$.

2 Prouver que : $\forall x \in [0, +\infty[,\ x \leqslant \ln(1+e^x) \leqslant x + \ln(2)$.

3 Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - e^{-x} \leqslant x$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 1.1

1 Étudier le signe de la différence.

2 Commencer par encadrer l'entier sous la racine carrée par deux carrés parfaits consécutifs.

EXERCICE 1.2

1 Étudier le signe de la différence.

2 D'abord réécrire l'inégalité en remplaçant les x par des $\ln(e^x)$.

3 Étudier la fonction $f : x \mapsto x - 1 + e^{-x}$.

Solutions des exercices

EXERCICE 1.1

1 ■ On calcule : $\dfrac{1}{\ln(2)} - \dfrac{2}{\ln(3)} = \dfrac{\ln(3) - 2\ln(2)}{\ln(2)\times\ln(3)} = \dfrac{\ln(3) - \ln(2^2)}{\ln(2)\times\ln(3)} = \dfrac{\ln(3)-\ln(4)}{\ln(2)\times\ln(3)}$.

Comme $2 > 1$ et $3 > 1$, on a $\ln(2) > 0$ et $\ln(3) > 0$.
De plus comme ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : $\ln(3) < \ln(4)$.

On en déduit que : $\dfrac{1}{\ln(2)} - \dfrac{2}{\ln(3)} = \dfrac{\ln(3)-\ln(4)}{\ln(2)\times\ln(3)} < 0$, d'où : $\dfrac{1}{\ln(2)} < \dfrac{2}{\ln(3)}$.

- On calcule : $\dfrac{e-1}{2e-3} - 1 = \dfrac{(e-1)-(2e-3)}{2e-3} = \dfrac{2-e}{2e-3}$.

  Comme $e \approx 2{,}7$, on a aussi $2e > 4$, donc $2-e<0$ et $2e-3>0$.

  On en déduit que : $\dfrac{e-1}{2e-3} - 1 = \dfrac{2-e}{2e-3} < 0$, d'où : $\dfrac{e-1}{2e-3} < 1$.

2

- On a : $25 < 29 < 36$.

  Par stricte croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$, il vient : $\sqrt{25} < \sqrt{29} < \sqrt{36}$.

  Ainsi : $5 < \sqrt{29} < 6$.

- De même on a : $64 < 73 < 81$, donc : $8 = \sqrt{64} < \sqrt{73} < \sqrt{81} = 9$.

  En multipliant par -1 (<0), il vient : $-8 > -\sqrt{73} > -9$.

  On ajoute 16 dans chaque membre de l'inégalité : $8 > 16 - \sqrt{73} > 7$.

  En multipliant par $\dfrac{1}{3}$ (>0), il vient : $\dfrac{8}{3} > \dfrac{16-\sqrt{73}}{3} > \dfrac{7}{3}$.

  En particulier : $\dfrac{9}{3} > \dfrac{8}{3} > \dfrac{16-\sqrt{73}}{3} > \dfrac{7}{3} > \dfrac{6}{3}$, d'où : $3 > \dfrac{16-\sqrt{73}}{3} > 2$.

EXERCICE 1.2

1 On a pour tout $x \in]3,+\infty[$: $\dfrac{7x-18}{2x-5} - 3 = \dfrac{(7x-18)-3(2x-5)}{2x-5} = \dfrac{x-3}{2x-5} > 0$,

car $x>3$, donc $x-3>0$ et $2x-5>1>0$. Ainsi : $\forall x \in]3,+\infty[,\ \dfrac{7x-18}{2x-5} > 3$.

2 Soit $x \in [0,+\infty[$. Il s'agit de montrer que : $\ln(e^x) \leqslant \ln(1+e^x) \leqslant \ln(e^x) + \ln(2)$.

On a $e^x \leqslant 1+e^x$, donc par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient : $\ln(e^x) \leqslant \ln(1+e^x)$.

De plus comme $x \geqslant 0$, on a $1 \leqslant e^x$, donc $1+e^x \leqslant e^x+e^x = 2e^x$ et par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient : $\ln(1+e^x) \leqslant \ln(2e^x) = \ln(e^x)+\ln(2)$.

On a donc bien prouvé que : $\forall x \in [0,+\infty[,\ x \leqslant \ln(1+e^x) \leqslant x + \ln(2)$.

3 On étudie les variations de la fonction $f : x \mapsto x - 1 + e^{-x}$ pour en déduire son signe.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - e^{-x}$.

Par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) > 0 \iff 1 > e^{-x} \iff \ln(1) > \ln(e^{-x}) \iff 0 > -x \iff 0 < x$$

Ainsi :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

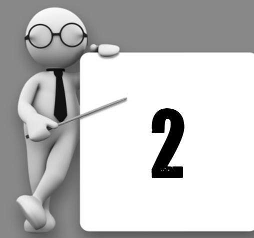
$$f(0) = 0 - 1 + e^0 = -1 + 1 = 0$$

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 + e^{-x} \geqslant 0$, et finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1 - e^{-x}$.

Solutions

Prouver une équivalence



Quand on ne sait pas !

- On dit qu'une proposition $\mathcal{P}_1$ implique une proposition $\mathcal{P}_2$ lorsque l'on peut écrire que : « **si** $\mathcal{P}_1$ est vraie, **alors** $\mathcal{P}_2$ est vraie ». Dans ce cas, on note : $\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$.

EXEMPLE 1

— Soit $x \in \mathbb{R}$. La proposition « $x \in [0,1]$ » implique la proposition « $x \in \mathbb{R}_+$ ».

— Soit $x \in \mathbb{R}$. La proposition « $x^2 = 1$ » implique la proposition « $x = -1$ ou $x = 1$ ».

- On dit qu'une proposition $\mathcal{P}_1$ est équivalente à une proposition $\mathcal{P}_2$ lorsque l'on peut écrire que : « $\mathcal{P}_1$ est vraie **si et seulement si** $\mathcal{P}_2$ est vraie », c'est-à-dire lorsque $\mathcal{P}_1$ implique $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_2$ implique $\mathcal{P}_1$. Dans ce cas, on note : $\mathcal{P}_1 \iff \mathcal{P}_2$.
L'implication $\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$ est souvent appelée « implication directe ».
L'implication $\mathcal{P}_2 \Rightarrow \mathcal{P}_1$ est souvent appelée « implication réciproque ».

EXEMPLE 2

— Soit $x \in \mathbb{R}$.
La proposition « $x \in [0,1]$ » n'est pas équivalente à la proposition « $x \in \mathbb{R}_+$ ».
En effet l'implication directe « $x \in [0,1] \Rightarrow x \in \mathbb{R}_+$ » est vraie.
Par contre l'implication réciproque « $x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x \in [0,1]$ » est fausse.

— Soit $x \in \mathbb{R}$.
La proposition « $x^2 = 1$ » est équivalente à la proposition « $x = -1$ ou $x = 1$ ».
En effet les deux implications $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$ sont vraies.

- Une proposition dépend souvent d'un ou plusieurs paramètres (x dans les exemples précédents). Il est indispensable de préciser dans quel ensemble on prend ces paramètres avant d'écrire l'équivalence, sinon celle-ci risque d'être fausse.

EXEMPLE 3

— Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équivalence « $x^2 = 1 \iff x = -1$ ou $x = 1$ » est vraie.

— Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équivalence « $x^2 = 1 \iff x = 1$ » est fausse.
En effet l'implication directe est fausse puisqu'on a oublié la solution $x = -1$.

— Soit $x \in \mathbb{R}_+$. L'équivalence « $x^2 = 1 \iff x = 1$ » est vraie.
En effet ici on s'est limité à un paramètre x positif, donc la solution $x = -1$ n'est pas à prendre en compte.

- Déterminer une « condition nécessaire et suffisante » pour qu'une proposition $\mathcal{P}_1$ soit vraie, c'est déterminer une proposition $\mathcal{P}_2$ (en général plus simple que $\mathcal{P}_1$) telle que : $\mathcal{P}_1 \Longleftrightarrow \mathcal{P}_2$.

  EXEMPLE 4

  Soit $x \in \mathbb{R}$. La proposition « $x = -1$ ou $x = 1$ » est une condition nécessaire et suffisante pour la proposition « $x^2 = 1$ ».

Que faire !

Pour prouver que deux propositions $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont équivalentes :

- On peut procéder par équivalences successives, notamment lorsqu'on résout des équations et des inéquations. Il faut alors bien vérifier à chaque étape qu'il est possible de revenir en arrière, c'est-à-dire que les implications $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$ sont bien toutes les deux vérifiées.
- On peut procéder par double-implication, c'est-à-dire prouver d'une part que $\mathcal{P}_1$ implique $\mathcal{P}_2$, puis prouver d'autre part que $\mathcal{P}_2$ implique $\mathcal{P}_1$. On procédera ainsi lorsque le raisonnement par équivalences successives n'est pas aisé à mettre en œuvre (voir la question 2 de l'exemple traité ainsi que l'exercice 2.2).

  Parfois pour prouver une implication $\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$ il est intéressant de procéder par contraposition : plutôt que de prouver que « si $\mathcal{P}_1$ est vraie, alors $\mathcal{P}_2$ est vraie », il revient au même de prouver que « si $\mathcal{P}_2$ n'est pas vraie, alors $\mathcal{P}_1$ n'est pas non plus vraie ».

  EXEMPLE 5

  Il revient au même d'affirmer : « si je suis en retard, alors je cours » et « si je ne cours pas, alors c'est que je ne suis pas en retard ».

Conseils

Dans la rédaction d'un raisonnement, il faut toujours préciser l'enchaînement logique liant deux lignes successives :

- Soit on procède par équivalences successives, et dans ce cas le symbole $\Longleftrightarrow$ doit apparaître à chaque étape.
- Soit on procède par implications successives, et dans ce cas plutôt que le symbole $\Rightarrow$ on préférera l'usage de connecteurs logiques écrits en français : « donc », « ainsi », « d'où », « par conséquent », « il vient alors », « on obtient », « on en déduit que »...

Il faut aussi souvent donner des arguments justifiant tel ou tel enchaînement. Les mots de liaison « or », « comme », « étant donné que », « car », « puisque »... sont alors utiles.

Exemple traité

1 Soit $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Prouver que : $\dfrac{x+1}{x'+1} = \dfrac{x-1}{x'-1} \Longleftrightarrow x = x'$.

2 Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Prouver que : $a^2 + b^2 = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0$.

SOLUTION

1 Pour $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
& \frac{x+1}{x'+1} = \frac{x-1}{x'-1} \\
\iff\ & \frac{(x+1)(x'-1)}{x'+1} = x-1 && \begin{pmatrix}\text{en multipliant de chaque} \\ \text{côté par } x'-1 \neq 0\end{pmatrix} \\
\iff\ & (x+1)(x'-1) = (x-1)(x'+1) && \begin{pmatrix}\text{en multipliant de chaque} \\ \text{côté par } x'+1 \neq 0\end{pmatrix} \\
\iff\ & xx' - x + x' - 1 = xx' + x - x' - 1 && \text{(en développant)} \\
\iff\ & 2x' = 2x && \text{(en simplifiant et réorganisant)} \\
\iff\ & x' = x && \text{(en simplifiant par } 2 \neq 0)
\end{aligned}$$

2 Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Prouvons l'équivalence demandée en procédant par double-implication, en commençant par prouver l'implication la plus facile.

- Implication $\Leftarrow$:
  On suppose que $a = b = 0$.
  On a alors immédiatement : $a^2 + b^2 = 0^2 + 0^2 = 0 + 0 = 0$.
  On a ainsi prouvé que si $a = b = 0$, alors $a^2 + b^2 = 0$.
- Implication $\Rightarrow$:
  On suppose que $a^2 + b^2 = 0$.
  Un carré étant positif, on a $b^2 \geqslant 0$, donc : $a^2 + b^2 \geqslant a^2$.
  Comme $a^2 + b^2 = 0$ et comme $a^2 \geqslant 0$, il vient : $0 \geqslant a^2 \geqslant 0$.
  On en déduit que $a^2 = 0$, ce qui implique que $a = 0$.
  On prouve de même que $b = 0$.
  On a ainsi prouvé que si $a^2 + b^2 = 0$, alors $a = b = 0$.

Par double-implication, on en déduit que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0$$

> De façon plus générale, on pourra retenir qu'une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous ces nombres sont nuls.