Chapitre I

CONSTRUIRE LES FIGURES ÉLÉMENTAIRES

Les constructions décrites dans ce premier chapitre sont *élémentaires*, non pas au sens de faciles, mais au sens de premières. Il sera question de tracer une parallèle ou une perpendiculaire à une droite, de placer le milieu d'un segment, de tracer la bissectrice d'un angle. Le géomètre qui sait effectuer ces constructions premières peut ensuite les combiner, soit pour réaliser des figures géométriques complexes, soit pour résoudre des problèmes. De telles figures et de tels problèmes seront présentés dans les chapitres suivants de cet ouvrage.

Les constructions permettent, en géométrie, de réaliser des figures théoriquement exactes, ce que ne permet pas toujours un travail numérique sur les mesures. Ainsi, dans un passage célèbre du *Ménon*, Socrate fait-il dessiner à un esclave un carré d'aire double de celle d'un carré donné [6, 80d1-86d2]. Il l'obtient en accolant quatre carrés égaux au carré donné, puis en les partageant chacun par une diagonale (figure 1).

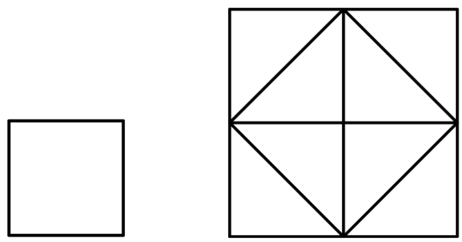

Figure 1

La construction est exacte au sens où le carré central obtenu a une aire exactement double de celle du carré donné. Cette exactitude ne peut pas être atteinte par un travail sur les mesures. Les côtés des deux carrés sont incommensurables, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas être mesurés en nombres entiers avec une même unité, résultat déjà connu et démontré par les Grecs au V^{e} siècle av. J.C.

Ce premier exemple met aussi en évidence que les constructions géométriques doivent être démontrées : il faut démontrer ici que le quadrilatère central est bien un carré, et que son aire est bien double de l'aire du carré initial. Une solution consiste à dire que la diagonale d'un petit carré le partage en deux triangles superposables. Ceux-ci possèdent par conséquent chacun, outre un angle droit, deux angles égaux à la moitié d'un angle droit, et leurs aires sont égales. Dès lors, le quadrilatère central possède quatre angles droits et des côtés égaux, donc c'est bien un carré. Son aire vaut quatre moitiés de l'aire du carré initial, c'est-à-dire son double.

Quant à établir que la diagonale d'un carré le partage effectivement en deux triangles superposables, nous pouvons, à l'instar d'Euclide [2] dans la quatrième proposition du premier livre de ses *Éléments*, concevoir la superposition de ces deux triangles et constater qu'ils coïncident en tous points. Les deux triangles possèdent en effet un angle égal, ici un angle droit, compris entre des côtés égaux deux à deux, ici égaux au côté du carré initial. En concevant la superposition, nous sommes forcés d'admettre la coïncidence des deux triangles. De cette coïncidence peut alors être déduite l'égalité des deux autres angles et du troisième côté des deux triangles, utilisée dans notre démonstration. Dans la suite de son ouvrage, Euclide démontre deux autres cas d'égalité des triangles, désormais sans recourir à l'intuition sensible de son lecteur. D'une part, deux triangles sont superposables lorsqu'ils ont un côté égal chacun à chacun compris entre deux angles égaux chacun à chacun. D'autre part, deux triangles sont superposables lorsque leurs trois côtés sont égaux chacun à chacun.

Les constructions géométriques sont effectuées avec des instruments, et le choix de ces instruments en conditionne le déroulement, la complexité, voire la possibilité. Le géomètre, le bâtisseur, l'ingénieur militaire ou le pédagogue recourent à des jeux d'instruments divers pour construire leurs figures. Un choix classique en géométrie élémentaire est celui de la règle et du compas, dont nous verrons qu'il correspond à la géométrie des *Éléments* d'Euclide. Un compas est obtenu par la rotation d'une longueur fixe autour d'une de ses extrémités, l'autre extrémité traçant alors un cercle. Une règle ne peut pas être définie de la sorte, et la définition de la ligne droite a constitué un problème épineux de la géométrie élémentaire. Une règle ne peut qu'être vérifiée à vue en traçant une ligne puis en retournant l'instrument et en s'assurant que la même ligne peut être tracée de nouveau.

Ce chapitre expose différents choix possibles d'instruments et illustre chacun par quelques exemples. À la règle et au compas, les enseignants ont pu ajouter l'équerre et le rapporteur, constituant ainsi un deuxième jeu possible d'instruments. Au XVII^{e} siècle, l'invention d'une nouvelle méthode, plus directe, pour réaliser les dessins en perspective a pour corollaire une série de constructions géométriques cette fois à la règle seule. L'art militaire, de son côté, nécessite le tracé de lignes et de figures, et emploie pour cela chaînes et jalons. Enfin, la précision exigée par la fabrication d'instruments de mesures astronomiques porte les artisans du XVIII^{e} siècle à préférer l'emploi du compas à celui de la règle, réalité qui encourage le géomètre Mascheroni à élaborer une « géométrie du compas ».

LES CONSTRUCTIONS À LA RÈGLE ET AU COMPAS : LES *ÉLÉMENTS* D'EUCLIDE

Dans quel ordre présenter les constructions de sorte que les premières servent à réaliser les suivantes ? Une réponse se trouve dans les *Éléments* d'Euclide, l'exemple connu le plus ancien et le plus célèbre d'une organisation déductive des propositions de la géométrie. Les propositions y sont de deux types, des constructions et des théorèmes, qui alternent entre eux. Or les théorèmes n'y établissent les propriétés d'une figure qu'après que la construction de cette figure a été exposée et surtout justifiée. C'est dire l'importance primordiale des constructions dans cet ouvrage. Les constructions sont, à leur tour, justifiées au moyen de théorèmes démontrés en amont, etc. Une telle organisation déductive suppose le choix de propositions données au départ, autrement dit d'axiomes ; ceux concernant les constructions sont au nombre de trois dans les *Éléments* d'Euclide :

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie, ou segment
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle

Pour qui veut réaliser les constructions avec des instruments, par exemple une règle et un compas, ces axiomes en légitiment les trois usages suivants : avec la règle, relier deux points (1) et prolonger un segment (2) ; avec le compas, tracer un cercle de centre et de rayon donnés (3). Toutes les constructions de l'ouvrage d'Euclide peuvent être réalisées au moyen de ces trois tracés élémentaires. Ceux-ci font intervenir deux lignes particulières, la ligne droite et le cercle, dont la perfection explique leur rôle privilégié dans la métaphysique grecque.

Les *Éléments* d'Euclide sont déclinés en treize livres. Nous présentons dans ce paragraphe presque toutes les constructions du livre I qui précèdent la théorie des aires, et les premières constructions du livre VI concernant le partage proportionnel d'une ligne. Disons d'emblée qu'il y a peu de chance que le lecteur découvre pour le moment des constructions dont il ne connaissait au moins une solution. L'intérêt réside principalement dans la qualité de l'ordonnancement des propositions. Isoler les constructions de l'ouvrage, comme cela est fait ici, en les séparant des théorèmes, donne à voir un enchaînement rigoureux et minimaliste caractéristique de l'ouvrage d'Euclide.

PREMIÈRES CONSTRUCTIONS ÉLÉMENTAIRES

La première proposition du premier livre, et donc la première proposition de l'ouvrage, est une construction, celle du triangle équilatéral sur une ligne donnée *AB*. Décrivons les deux cercles de rayon *AB* et de centres respectifs *A* et *B*. D'un des points *C* où ils se coupent, conduisons les segments *CA*, *CB*. Les trois segments *AB*, *CA* et *CB* sont égaux au rayon de chacun des cercles, donc le triangle *ABC* est équilatéral.

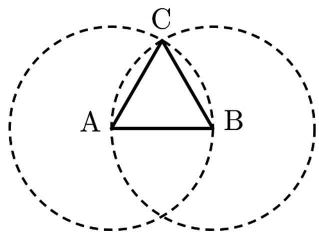

Figure 2

Cette première construction est directement utilisée pour trouver les constructions des trois figures ci-dessous, à savoir les constructions de la bissectrice d'un angle, du milieu d'un segment et de la perpendiculaire à une droite. Entre temps, Euclide a montré comment retrancher une longueur donnée d'une ligne donnée, construction qui légitime cet autre usage essentiel du compas qu'est le report d'une longueur.

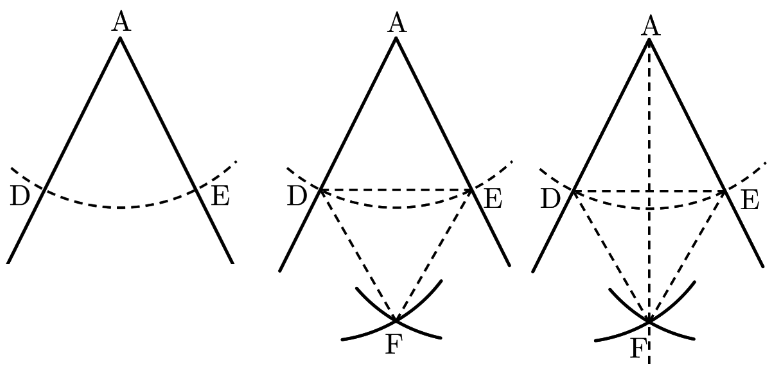

Figure 3

Pour construire la bissectrice d'un angle *DAE*, prenons deux points *D* et *E* à égale distance du sommet *A* de l'angle à partager, et construisons sur la ligne *DE* le triangle équilatéral *DEF*. La ligne *AF* partage l'angle donné en deux parties égales. En effet, les deux triangles *ADF* et *AEF* ayant par construction leurs côtés égaux deux à deux, ils sont superposables. Les angles *DAF* et *EAF* sont donc égaux.

Pour construire le milieu d'une ligne donnée *AB* (figure 4), traçons un triangle équilatéral *ABC* puis partageons l'angle *ACB* en deux parties égales par la droite *CD* : la ligne *AB* est partagée en deux parties égales au point *D*. Les triangles *ACD* et *BCD* ont par construction deux angles égaux compris entre deux paires de côtés égaux deux à deux. Ils sont donc superposables et par conséquent leurs troisièmes côtés, *AD* et *BD*, sont égaux.

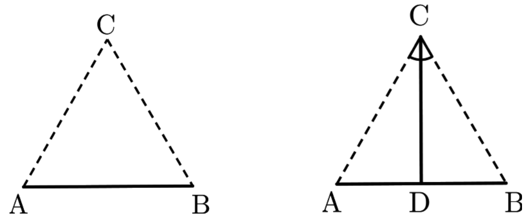

Figure 4

Pour mener une perpendiculaire en un point *C* à une ligne *AF* (figure 5), prenons un point quelconque *D* sur cette ligne, puis le point *E* tel que *CE* = *CD*, et construisons le triangle équilatéral *DEZ*. La droite *CZ* est la droite cherchée. Les triangles *DZC* et *EZC* étant superposables, les angles *DCZ* et *ECZ* sont égaux. Or ces derniers forment ensemble un angle plat, donc ce sont deux angles droits. La droite *CZ* est donc perpendiculaire à *AF*.

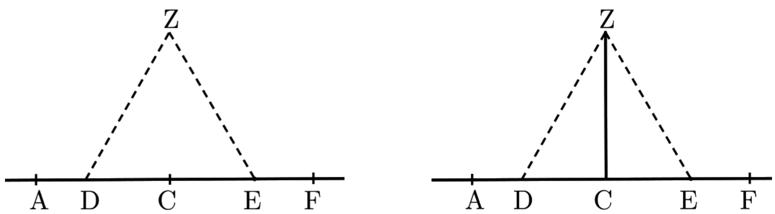

Figure 5

À son tour, cette dernière construction est utilisée pour construire la perpendiculaire à une droite *AB* passant par un point *C* extérieur cette fois-ci à cette droite (figure 6).

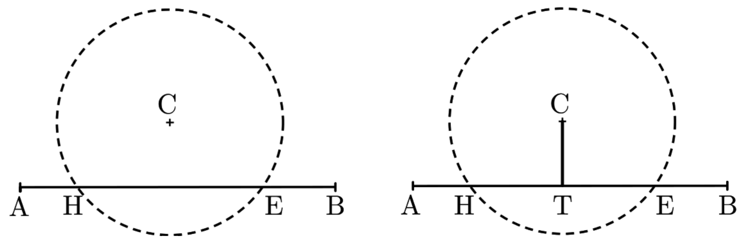

Figure 6

La ligne *AB* et le point *C* étant donnés, traçons un cercle de centre *C* qui coupe la droite *AB* en deux points *H* et *E*. Plaçons le point *T* milieu de *HE*. La ligne *CT* est la perpendiculaire demandée. Les triangles *CHT* et *CET* sont superposables, les angles *CTH* et *CTE* sont égaux et forment ensemble un angle plat, donc ils sont droits.

La proposition que nous allons voir maintenant donne la construction d'un triangle connaissant ses trois côtés. Elle sera ensuite utilisée à son tour pour réaliser deux constructions essentielles, celle de reporter un angle dans une figure et celle de tracer une parallèle à une droite. Étant donnés les côtés *a*, *b*, *c* du triangle à construire, traçons, sur une même ligne, *DZ* égale à *a*, *ZH* égale à *b* et *HE* égale à *c*. Traçons les cercles de centre *Z* et de rayon *ZD* et de centre *H* et de rayon *HE*. D'un des points d'intersection *T*, traçons les lignes *TH*, *TZ*. Le triangle *HTZ* est le triangle cherché.

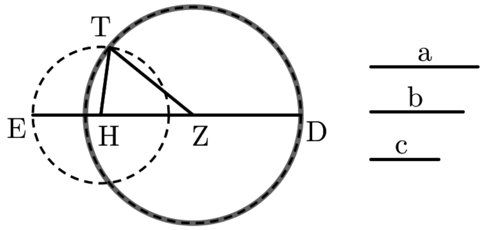

Figure 7

Cette dernière construction sert directement pour construire au point *A* d'une droite *AB* donnée un angle égal à un angle *DCE* donné (figure 8). Pour cela, construisons un triangle *ZAH* égal au triangle *DCE*.

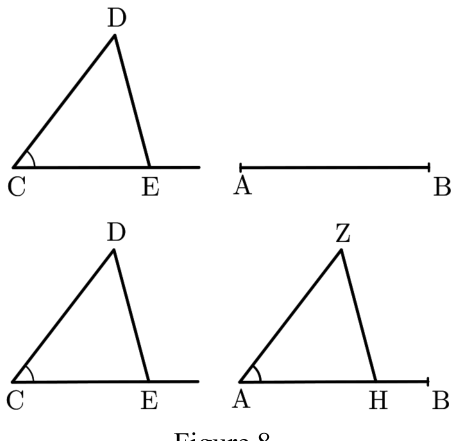

Figure 8

Pour construire la droite parallèle à une droite *BC* passant par un point *A* (figure 9), prenons un point *D* sur la droite *BC* et construisons au point *A* de la droite *DA* un angle *DAE* égal à l'angle *ADC*. Alors, les droites *EZ* et *BC* sont parallèles. Cette déduction repose sur un axiome, qui n'était pas nécessaire jusqu'à présent. Connu sous le nom d'axiome des parallèles, il caractérise la géométrie euclidienne, par opposition aux géométries dites non euclidiennes.

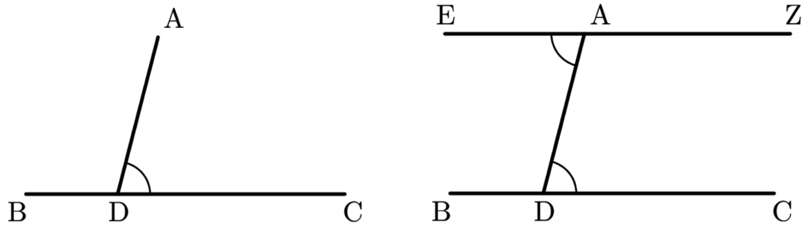

Figure 9

CONSTRUIRE DES LIGNES PROPORTIONNELLES

Terminons notre revue des constructions élémentaires de l'ouvrage d'Euclide par le partage d'une droite en parties proportionnelles à des lignes données. Ce problème est traité dans le livre VI, qui fait suite à un livre V entièrement consacré à la théorie des rapports de grandeurs. La solution est déduite du théorème suivant, communément appelé aujourd'hui le théorème de Thalès, et placé au début de ce livre VI (figure 10) :

> *Si une certaine droite est menée parallèle à l'un des côtés d'un triangle, elle coupera les côtés du triangle en proportion et si les côtés du triangle sont coupés en proportion, la droite jointe entre les points de section sera parallèle au côté restant du triangle* [2, vol. 2, p.159].

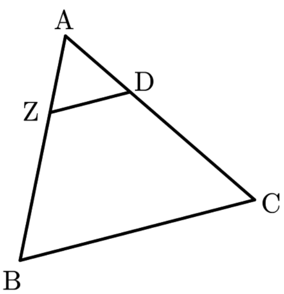

Figure 10

Les rapports AZ : ZB et AD : DC sont identiques, ce que nous écrivons AZ : ZB :: AD : DC. Signalons que le fil déductif n'est pas rompu par ce saut en avant de cinq livres car, bien que les livres II à IV contiennent de nombreuses constructions, seul le tracé d'une parallèle à une droite, traité au livre I, sera employé ici.

Pour prendre la partie d'un segment donné *AB* (figure 11), par exemple le tiers, menons du point *A* une droite quelconque. Prenons sur cette droite un point quelconque *D*, et traçons les segments *DE*, *EC* égaux à *AD*. Joignons *BC* et par le point *D* menons-lui la parallèle *DZ*. *AZ* est le tiers de *AB*. En effet, le théorème ci-dessus donne *AZ* : *ZB* :: *AD* : *DC* = 1 / 2 donc *AZ* est la moitié de *ZB*, et par conséquent le tiers de *AB*.

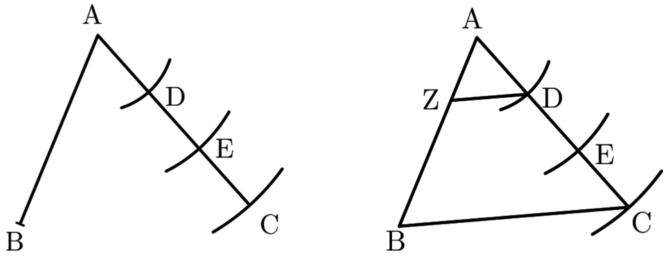

Figure 11

Pour partager plus généralement une ligne *AB* comme une autre ligne *AC* est partagée aux points donnés *D* et *E* (figure 12), joignons *BC*, et par les points *D*, *E* menons les droites *DZ*, *EH* parallèles à *BC*. Le segment *AB* a été partagé de la même manière que le segment donné *AC*.

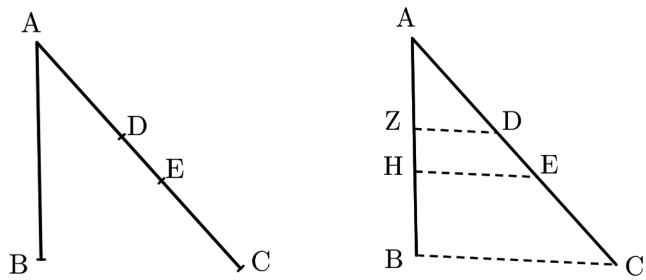

Figure 12

Enfin, voici la construction d'une quatrième proportionnelle (figure 13), c'est-à-dire, étant données trois lignes *A*, *B* et *C*, la construction d'une quatrième ligne *F* telle que le rapport de *A* à *B* soit égal au rapport de *C* à *F*. Cette construction permet, notamment, de réaliser des agrandissements et réductions de figures [voir chapitre II].

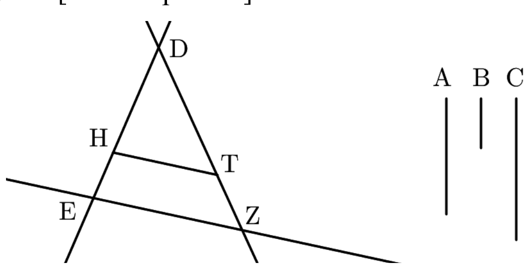

Figure 13