Rappels de cours

Mathématiques

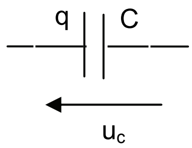
L'image d'un point d'affixe z par la rotation de centre d'affixe w et d'angle Θ a pour affixe

$$e^{i\Theta}(z-w)+w.$$

Physique

Un condensateur est caractérisé par sa capacité C qui s'exprime en farad (F).
Relations aux bornes d'un condensateur :

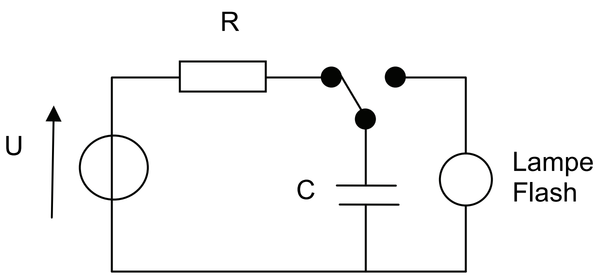
$$u_C = q / C \text{ ou } q = Cu_C \text{ et } i = dq/dt$$



Énergie emmagasinée : $\boxed{E_{el} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}Cu_c^{\,2}}$

Exercice de physique

Le flash d'un appareil photographique fonctionne grâce à un générateur de tension U = 300 V (fourni par un circuit électronique alimenté par une pile) connecté en série avec une R = 1,00 kΩ et un condensateur de capacité C = 150 μF. La charge du condensateur permet ensuite d'amorcer une lampe flash qui pourra émettre un éclair très bref.
On schématise le fonctionnement de c dispositif sur le schéma ci-dessous :



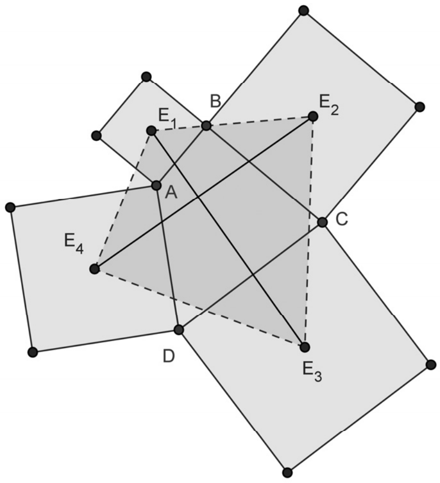
1. Établir l'équation différentielle en fonction de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.
2. On donne l'expression de la constante de temps τ = RC. Vérifier par analyse dimensionnelle l'homogénéité de cette formule.
3. Calculer numériquement τ.

4. Calculer l'énergie emmagasinée E par le condensateur de capacité C une fois la charge terminée.
5. Calculer l'énergie E' qu'aurait stockée le condensateur s'il avait été chargé directement à l'aide d'une pile (tension 1,5 V), justifier l'intérêt de charger le condensateur avec une haute tension de 300 V.
6. La décharge dans la lampe flash s'effectuant sur un temps caractéristique de 150 μs, déterminer la résistance équivalente à la lampe flash.

Exercice de mathématiques

Une configuration de Von Aubel

À l'extérieur d'un quadrilatère ABCD non croisé, on construit quatre carrés de côtés respectifs [AB], [BC], [CD] et [DA] de centres respectifs E_1, E_2, E_3 et E_4.



Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés du quadrilatère $E_1E_2E_3E_4$.
Pour cela, le plan est rapporté un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ dans lequel les points A, B, C, D, E_1, E_2, E_3 et E_4 ont pour affixes respectives a, b, c, d, e_1, e_2, e_3 et e_4.

1. En montrant que B est l'image de A par une rotation particulière, établir que $e_1 = \frac{ai - b}{i - 1}$.
2. Déterminer de même les affixes e_2, e_3 et e_4.
3. Montrer alors que les diagonales du quadrilatère $E_1E_2E_3E_4$ sont orthogonales et de même longueur.
4. Montrer que $E_1E_2E_3E_4$ est un carré si et seulement si ABCD est un parallélogramme (on cherchera pour cela une condition nécessaire et suffisante pour que $E_1E_2E_3E_4$ soit un parallélogramme).

Rappels de cours

Mathématiques

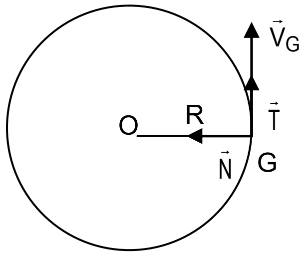
Dérivabilité – Une fonction f est dérivable en a si $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est finie. Dans ce cas cette limite est f ’(a).

Physique

Force de pesanteur, champ de pesanteur uniforme

La force de gravitation (ou de pesanteur) ou poids s’exprime par la relation :

$$\boxed{\vec{F}_{gravitation} = -G\frac{M_T m}{r^2}\vec{u}_r}$$

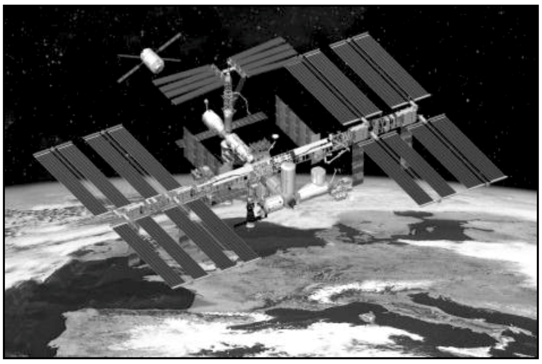


où G est la constante de gravitation, MT la masse de la Terre, m la masse de l’objet M et $\vec{u}_r$ vecteur unitaire orienté de la Terre vers l’objet.

Pour un mouvement circulaire, dans le repère mobile lié point mobile G, on a :

$$\boxed{\vec{a}_G = \frac{dv_G}{dt}\vec{u}_\theta - \frac{v_G^2}{R}\vec{u}_r}$$

Exercice de physique



Par rapport au référentiel géocentrique, la Station Spatiale Internationale (ISS) effectue seize révolutions par jour sur une orbite circulaire, inclinée de 51,6° par rapport à l’équateur et située à une altitude z (environ 400 km). La Terre a une répartition de masse à symétrie sphérique et la station a des dimensions faibles par rapport à la distance qui la sépare de la Terre.

On notera M_T et R_T la masse et le rayon de la Terre, M_S la masse de la station, G : constante de gravitation universelle et z l’altitude de la station.

1. Donner l’expression vectorielle de la force gravitationnelle que la Terre exerce sur la station en fonction des données. Faire un schéma où seront représentées la Terre, la station et la force.

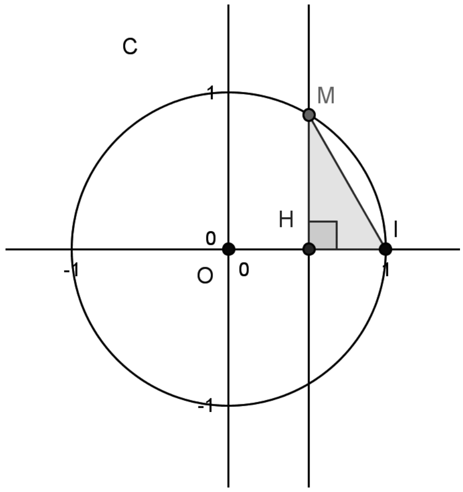
2. Étude de la vitesse

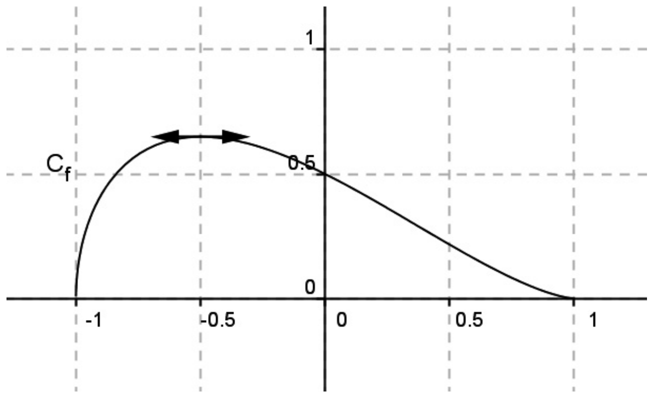
2.1. En supposant que seule la force gravitationnelle s’exerce sur la station, montrer que le mouvement de la station est uniforme et établir l’expression de sa vitesse en fonction des données.

2.2. La masse M_S de la station croît au fur et à mesure de sa construction : elle valait 195 tonnes en septembre 2006 et vaudra 435 tonnes en 2010, date prévue pour la fin de sa construction. La vitesse de la station sur son orbite sera-t-elle modifiée ?

Exercice de mathématiques

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et le point I de coordonnées (1 ; 0). M est le point du cercle $\mathcal{C}$ d'abscisse x, d'ordonnée positive, et H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses.





1. Montrer que l'aire du triangle MHI vaut, pour tout $x \in [-1 ; 1]$:

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - x)\sqrt{1 - x^2}$$

Une représentation graphique de la courbe représentative de f est donnée ci-dessus.

2. Étude de la dérivabilité de f

2.1. La fonction f semble-t-elle, d'après la représentation graphique fournie, être dérivable en 1 ? En –1 ?

2.2. Confirmer, ou infirmer, par le calcul, les conjectures établies précédemment. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?

2.3. En déduire une équation des tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses –1 et 1.

3. Étude des variations de f

3.1. Calculer la dérivée de f et en déduire ses variations.

3.2. Pour quelle valeur de x, l'aire du triangle MHI est-elle maximale ? Quel est ce maximum ?

Rappels de cours

Mathématiques

Deux suites sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre est décroissante et leur différence tend vers 0. Deux suites adjacentes convergent vers la même limite. $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$, $\binom{n}{p}$ = 0 si p > n.

Chimie

Un acide au sens de Brönsted est une espèce chimique susceptible de céder un proton H^+.
Un couple acide/base est l'association de deux espèces chimiques susceptibles d'échanger un (ou plusieurs) proton(s). Il s'agit donc d'un acide et d'une base, qui sont dits conjugués.
La réaction de l'acide d'un couple avec l'eau est modélisée par l'équation :

$$\text{acide}_{(aq)} + H_2O_{(l)} = \text{base}_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$$

La constante d'équilibre de cette réaction est appelée constante d'acidité K_A du couple.
On définit donc : $pK_A = -\log K_A$
Pour un tel couple, on peut également écrire :

$$pH = pK_A + \log\frac{[\text{base}]_{eq}}{[\text{acide}]_{eq}}$$

Exercice de mathématiques

Suite de Fibonacci et nombre d'or

Soit (F_n) la suite définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.
Le but de l'exercice est, après une étude succincte de la suite de Fibonacci, de montrer quelques propriétés d'une suite dérivée de ses termes.

1. Quelques résultats préliminaires
1.1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \geq n$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} F_n$.
1.2. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$$

2. On considère maintenant la suite (Q_n) de terme général $Q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$.
2.1 Calculer les dix premiers termes de cette suite en valeur exacte puis approchée.
2.2 Calculer $\lim_{n\to+\infty}(Q_{n+1} - Q_n)$.
2.3 En étudiant le signe de $Q_{n+1} - Q_n$, étudier la monotonie des suites (Q_{2p}) et (Q_{2p+1}).
2.4 En déduire que la suite (Q_n) converge.

3. Méthode employant la formule de Binet

3.1 Montrer que :

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \quad \text{et} \quad \left(1-\varphi\right)^2 = \left(1-\varphi\right) + 1.$$

3.2 En déduire que pour tout $n \in N$:

$$\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n \quad \text{et} \quad (1-\varphi)^{n+2} = (1-\varphi)^{n+1} + (1-\varphi)^n.$$

3.3 Démontrer alors la formule de Binet :

$$F_n = \frac{\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

3.4 Retrouver à l'aide de cette formule la limite de la suite (Q_n).

4. Une curiosité

Remarquer et démontrer que les termes de la suite de Fibonacci s'obtiennent en effectuant la somme des termes diagonaux (du bas vers la droite) du triangle de Pascal.

		1					
		1	2				
1			3	5			
1	1			8	13		
1	2	1			21	34	
1	3	3	1			55	
1	4	**6**	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1
1	8	28	56	70	56	28	8
1	9	36	84	126	126	84	36
1	10	45	120	210	252	210	120

On pourra alors démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$$

Exercice de chimie

Le cyanure de potassium ou KCN est très toxique : il est utilisé dans tous les (bons) romans policiers pour se débarrasser d'une belle mère acariâtre. En général, la mort intervient par arrêt du cœur. Malheureusement pour le meurtrier, les ongles et les lèvres virent au rose-violet et une odeur d'amande sort dans la bouche de la victime.

Dans cet exercice, on mélange une solution aqueuse de cyanure de potassium KCN avec une solution aqueuse d'acide méthanoïque HCOOH.

1. Sur un axe de pH, placer les domaines de prédominance des deux couples acide / base mis en jeu.

2. Écrire l'équation bilan de la réaction.

3. Le pH de la solution vaut 8. Déterminer le rapport des espèces :

$$[CN^-] / [HCN] \text{ et } [HCOO^-] / [HCOOH]$$

Données :

$$pK_{A1}\ (HCN / CN^-) = 9{,}3$$
$$pK_{A2}\ (HCOOH / HCOO^-) = 3{,}8$$

Rappels de cours

Mathématiques

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ke^{ax}$ où K est une constante réelle. La tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable f a pour coefficient directeur $f'(a)$ et pour équation :

$$y = (x - a)f'(a) + f(a).$$

Chimie

Un **oxydant** est une espèce chimique susceptible de capter des électrons.
Un **réducteur** est une espèce chimique susceptible d'en céder.

Un **couple oxydant/réducteur** est l'association de deux espèces chimiques susceptibles d'échanger un ou plusieurs électrons. Il s'agit donc de l'association d'un oxydant et d'un réducteur, qui sont dit conjugués.
Cet échange est modélisé de façon formelle (un électron n'existe pas en solution aqueuse) par une **demi-équation électronique** de type :

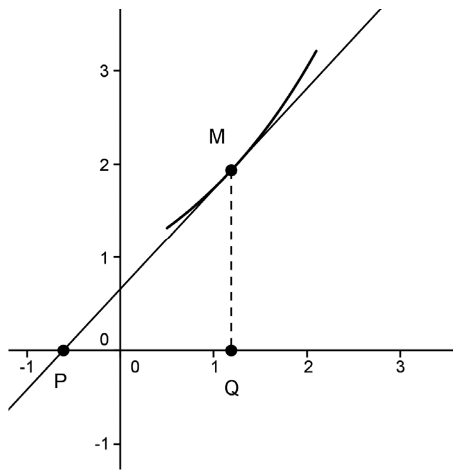
$$\text{Oxydant} + n\,e^- = \text{Réducteur}$$

Les **réactions d'oxydoréduction** consistent en un transfert d'électrons entre l'oxydant d'un couple et le réducteur d'un autre couple.

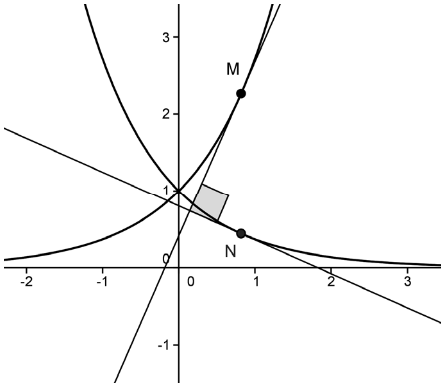
Exercice de mathématiques

Soit Γ la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ dans un repère du plan telle que :

- en tout point M de Γ d'abscisse a, cette courbe admet une tangente coupant l'axe des abscisses en un point P ;
- le projeté orthogonal Q de M sur l'axe des abscisses vérifie PQ = k (avec k > 0).



Les questions suivantes ont pour objet de déterminer une expression algébrique de f (et donc de justifier son existence).



1. Justifier que la dérivée de f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si M a pour abscisse a, alors P a pour abscisse $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$, puis que $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| = k$.
3. Déduire de ce qui précède que la fonction f est solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' = \frac{1}{k}y$ ou de $(E_2) : y' = -\frac{1}{k}y$.
4. Quelles sont les solutions possibles pour f ?
5. On suppose ici que k = 1 et on note f_1 et f_2 les deux solutions du problème dont les courbes représentatives Γ_1 et Γ_2 passent par le point A de coordonnées (0 ; 1).
   Montrer qu'en tous points M et N, de même abscisse, appartenant respectivement à Γ_1 et Γ_2, les tangentes sont orthogonales.

Exercice de chimie

Le zinc est un métal qui permet de protéger le fer et l'acier de la rouille. Il est présent sur la plupart des poteaux métalliques sous la forme d'une peinture grise présentant des « écailles ».
Le zinc réagit en milieu acide selon la réaction d'équation :

$$Zn_{(s)} + 2\ H_3O^+ = Zn^{2+}_{(aq)} + H_{2\ (g)} + 2\ H_2O_{(l)}$$

À l'instant de date t = 0 s, on verse un volume V = 75,0 mL de solution d'acide sulfurique de concentration molaire en ions oxonium C = 0,40 $mol.L^{-1}$ sur une masse m = 0,50 g de zinc en poudre.

1. Établir le tableau d'évolution du système.
2. En déduire la valeur de l'avancement maximal x_{max}. Quel est le réactif limitant ?
3. On place dans une solution de Fe^{2+} de la poudre de zinc. Ce dernier est oxydé et du fer solide apparaît. Après avoir écrit les demi-équations électroniques mise en jeu, déterminer l'équation bilan de la réaction.