Chapitre 1

Les lois de Descartes

Rappels de cours

I Définitions

On définit le **plan d'incidence** comme celui généré par le rayon incident et la normale au dioptre.

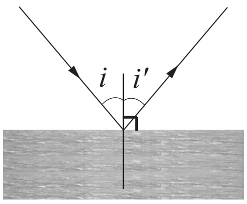
Un **rayon lumineux** peut être considéré comme le trajet d'un photon. Dans un milieu homogène, la lumière se propage en ligne droite.

La **vitesse de la lumière** dans le vide sert aujourd'hui à définir le mètre : elle est très précisément égale à 299 792 458 mètres par seconde.

II Loi de la réflexion

Le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence et vérifie

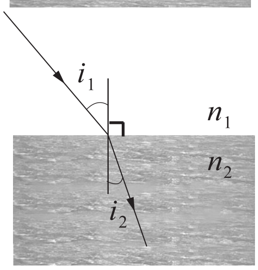
$$\boxed{i = i'}$$



III Loi de la réfraction

Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence et les angles des rayons incident et réfracté vérifient

$$\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$$



De cette relation, on déduit que le rayon réfracté se rapproche de la normale au dioptre lorsqu'il arrive dans un milieu d'indice plus élevé (plus réfringent).

Les savoir-faire

✓ Déterminer un angle limite de réflexion

Pour s'entraîner : exercices 1 et 2.

✓ Déterminer un angle de déviation

Pour s'entraîner : exercices 2 et 3.

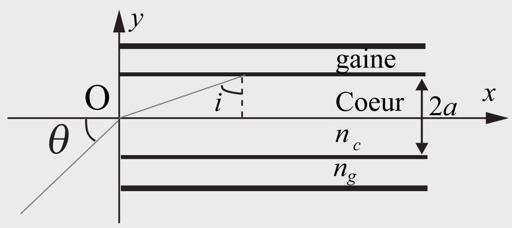
✓ Calculer un indice

Pour s'entraîner : exercices 3 et 4.

Exercices

Exercice 1.1. ■□□

Une fibre à saut d'indice, représentée sur la figure ci-dessous, est formée d'un cœur cylindrique en verre d'axe Ox, de diamètre $2a$ et d'indice n_c, entouré d'une gaine optique d'indice n_g légèrement inférieur à n_c. Un rayon situé dans le plan Oxy entre dans la fibre au point O avec un angle d'incidence θ.



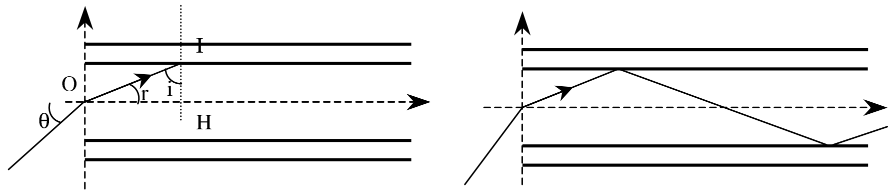
1 - À quelle condition sur i, angle d'incidence à l'interface cœur/gaine, le rayon reste-t-il confiné à l'intérieur du cœur ?
On note i_{L} l'angle d'incidence limite.
Faire un dessin du trajet ultérieur du rayon en faisant apparaître plusieurs réflexions.
2 - Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence θ est inférieur à un angle d'incidence θ_{L} tel que $\sin\theta_{\mathrm{L}} = n_c \cos i_{\mathrm{L}}$.
3 - En déduire l'expression de l'ouverture numérique O.N de la fibre définie par O.N $= \sin\theta_{\mathrm{L}}$ en fonction de n_c et n_g uniquement.
4 - Donner la valeur numérique de O.N pour n_c = 1,500 et n_g = 1,470.

À réviser : lois de Snell-Descartes ; phénomène de réflexion totale

Solution

1 - Au point I, le dioptre sépare un milieu plus réfringent (le cœur de la fibre) d'un milieu moins réfringent (la gaine). Il y a donc possibilité de réflexion totale.

Plus précisément si l'angle d'incidence i est tel que $i > i_{\mathrm{L}}$ angle d'incidence limite défini par la relation $i_{\mathrm{L}} = \arcsin\left(\dfrac{n_g}{n_c}\right)$, il y a réflexion totale et la lumière se propage dans le cœur de la fibre. On obtient le cheminement de la lumière suivant pour une incidence θ :



2 - Le triangle $(\mathrm{O}, \mathrm{H}, \mathrm{I})$ est rectangle en H. La condition précédente impose sachant que $r = \dfrac{\pi}{2} - i$:

$$r < r_{\mathrm{L}} = \frac{\pi}{2} - i_{\mathrm{L}} \quad \text{soit} \quad \sin r < \cos i_{\mathrm{L}}$$

car la fonction sin étant strictement croissante sur $-\left]\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

soit $$n_c \sin r < n_c \cos i_{\mathrm{L}}$$

En appliquant la loi de Snell-Descartes pour la réfraction au point O, on tire que :

$$\boxed{n_{air} \sin\theta < n_c \cos i_{\mathrm{L}}}$$

3 - $$\sin\theta < \frac{n_c}{n_{air}}\sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}$$

On en conclut alors que le rayon lumineux restera confiné à l'intérieur du cœur de la fibre si $\theta < \theta_{\mathrm{L}}$ tel que :

$$\boxed{\mathrm{O.N} = \sin\theta_{\mathrm{L}} = \frac{1}{n_{air}}\sqrt{n_c^2 - n_g^2}}$$

4 - **Application numérique :** $\mathrm{O.N} = \dfrac{1}{1,000}\sqrt{1,500^2 - 1,470^2}$

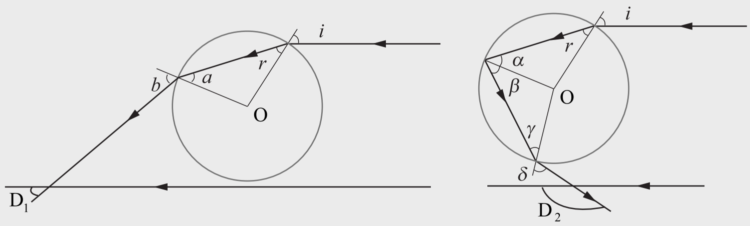
Ainsi, $$\boxed{\mathrm{O.N} = 2,985.10^{-1}}$$

Les petits plus **CULTURE**

De nos jours, les autoroutes de l'information offrent la possibilité de transmettre des données, de la voix, des images, etc. Plus de 80 % du trafic mondial longue distance se fait par fibres optiques. Ces dernières ont en effet de multiples avantages par rapport aux câbles électriques classiques : elles sont plus robustes et très peu sensibles aux interférences électromagnétiques. Elles permettent de transmettre des informations sur de très longues distances et à de très hauts débits. Alcatel-Lucent annonçait en 2009 avoir établi un nouveau record de transmission de données par fibre optique : 15,5 Tbits/s sur une distance de plus de 7000 kilomètres, débit équivalent à plusieurs centaines de milliers de connexions Internet haut débit.

Exercice 1.2. ■□□

Une goutte d'eau, représentée par une sphère de centre O et de rayon R, est atteinte par la lumière solaire sous des incidences variables, comprises entre 0 et 90. Son indice, pour une radiation donnée, sera noté $n = 1,33$ tandis que celui de l'air sera pris égal à l'unité. Un rayon lumineux frappant cette goutte peut être réfléchi à l'intérieur de celle-ci. On aboutit donc aux deux configurations suivantes.

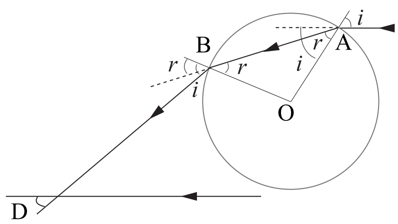


1 - Déterminer les angles a et b puis l'angle de déviation D_1, en fonction de i et r.
2 - Exprimer en fonction de l'angle d'incidence i ou de l'angle de réfraction r, tous les angles marqués de lettres grecques.
3 - En déduire l'angle de déviation D_2, en fonction de i et de r.
4 - Pour quelle valeur minimale de r, les rayons sont totalement réfléchis.

À réviser : lois de Descartes ; relation dans un triangle

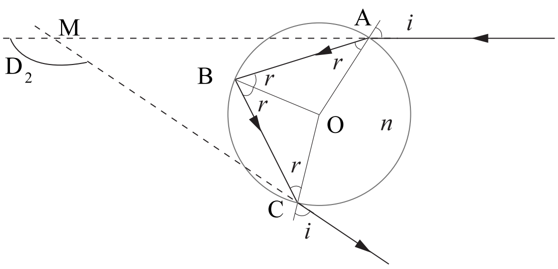
Solution

1 - Le triangle OAB étant isocèle, les angles a et r sont égaux. D'après les relations de Descartes, $\sin i = n \sin r = \sin b$. On en déduit que $b = i$. Pour obtenir l'angle D, remarquons que le rayon incident tourne au premier dioptre de $i - r$ puis au second de $i - r$.



La déviation totale vaut donc $D_1 = 2i - 2r$

2 - Nommons A, B et C les lieux de déviation du rayon.



Le triangle OAB étant isocèle, $\alpha = r$, d'après la loi de la réflexion,

$$\beta = \alpha = r\,.$$

Comme OBC est isocèle, $\gamma = \beta = r$. D'après les lois de Descartes, on a

$$n \sin r = \sin i \text{ et } n \sin \gamma = \sin \delta$$

Ainsi, $$\gamma = r \text{ et } \delta = i.$$

3 - Exprimons l'angle de déviation dans le triangle isocèle MAC

$$\pi - \mathrm{D}_2 + \widehat{\mathrm{MAC}} + \widehat{\mathrm{ACM}} = \pi$$

Comme $\widehat{\mathrm{MAC}} = i + \widehat{\mathrm{OAC}}$, en utilisant les propriétés des triangles inscrits dans un cercle, $\widehat{\mathrm{COA}} = 2\widehat{\mathrm{CBA}} = 4r$. Dans le triangle CAB il vient

$$2\widehat{\mathrm{OAC}} + 4r = \pi \quad \text{soit} \quad \widehat{\mathrm{MAC}} = i + \pi/2 - 2r$$

Finalement : $$\boxed{\mathrm{D}_2 = 2\widehat{\mathrm{MAC}} = \pi + 2i - 4r}$$

Les petits plus — **TRUC & ASTUCES**

Il est également possible d'étudier la rotation à chaque point A, B et C. Le rayon tourne de $i - r$, $\pi - 2r$ et $i - r$. On obtient alors une rotation de

$$\mathrm{D} = i - r + \pi - 2r + i - r \quad \text{soit} \quad \mathrm{D} = \pi + 2i - 4r$$

4 - L'angle critique pour une goutte d'eau est donnée par :

$$r_c = \arcsin 1/n = 49°$$

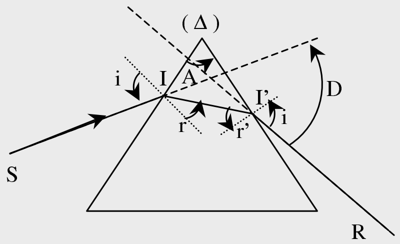
Les petits plus — **CULTURE**

Un arc-en-ciel s'explique par l'accumulation des rayons sortant d'un goutte d'eau lorsque l'angle de déviation est voisin de $42°$. En effet, pour cette valeur, les rayons sont réfléchis à l'intérieur de la goutte d'eau.
On nomme dispersion le fait que l'indice d'un corps varie en fonction de la longueur d'onde. Pour l'eau, l'indice est plus élevé pour les longueurs d'ondes bleus ($n \approx 1,34$) que rouge ($n \approx 1,33$). Il en résulte qu'un arc en ciel présentera les couleurs bleus vers le centre et rouge vers l'extérieur. Il également possible d'observer un secondaire moins lumineux s'expliquant par une double réflexion à l'intérieur de la goutte.

FIGURE 1.1 – Arc-en-ciel

Exercice 1.3. ■■■

On considère un prisme taillé dans un matériau transparent d'indice de réfraction *n*. Les deux faces du prisme sont baignées par l'air dont l'indice sera assimilé à celui du vide c'est-à-dire 1 rigoureusement.
On appelle plan de section principale, tout plan orthogonal à l'arête (Δ).
Les angles sont orientés selon la figure ci-contre :



1 - On considère un rayon incident SI contenu dans un plan de section principale.
Montrer que le rayon II' est contenu dans ce plan et que le rayon I'R, lorsqu'il existe, est également contenu dans ce même plan.
2 - Établir les formules du prisme, à savoir :
- 2.1. loi de Descartes en I
- 2.2. loi de Descartes en I'
- 2.3. relation entre A, *r* et *r'*
- 2.4. on appelle déviation du prisme l'angle D que font les supports de rayons incident SI et émergent I'R (lorsque celui-ci existe). Écrire la relation entre D, *i*, *i'* et A.

3 - Montrer que pour que le rayon I'R existe, il est nécessaire que les deux conditions suivantes soient satisfaites :
- 3.1. $\mathrm{A} \leqslant 2.\arcsin \dfrac{1}{n}$
- 3.2. $i_0 \leqslant i \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ avec $\sin i_0 = n.\sin\left[\mathrm{A} - \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]$

4 - Tracer l'allure de la courbe représentant les variations de D avec i. Cette courbe fait apparaître un minimum D_m pour D.
Montrer que ce minimum est atteint pour $i = i' = i_m$ et $r = r'$.
Exprimer alors l'indice *n* en fonction de A et D_m.

À réviser : lois de Snell-Descartes ; principe du retour inverse de la lumière ; réflexion totale

Solution

1 - La première loi de Snell-Descartes pour la réfraction appliquée en I permet d'affirmer que le rayon II' appartient au plan d'incidence défini par le rayon SI et la normale au dioptre en I. Or ce plan est un plan de section principale du prisme.
De même, la même loi appliquée au point I' permet de conclure aisément : les rayons SI, II' et I'S sont coplanaires et appartiennent au plan de section principale du prisme contenant I.
2.1 - La loi de Snell-Descartes pour la réfraction appliquée en I et sachant que $n_{air} = 1$ stipule :

$$\boxed{\sin i = n.\sin r}$$

2.2 - De même, la loi de Snell-Descartes pour la réfraction appliquée en I' stipule :

$$\boxed{\sin i' = n.\sin r'}$$

2.3 - Dans le triangle $(\mathrm{O},\mathrm{I},\mathrm{I}')$, il vient :

$$\mathrm{A} + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) = \pi$$

D'où :

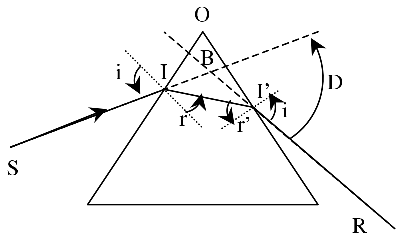
$$\boxed{\mathrm{A} = r + r'}$$

2.4 - De même, dans le triangle $(\mathrm{B},\mathrm{I},\mathrm{I}')$, il vient :

$$(\pi - \mathrm{D}) + (i - r) + (i' - r') = \pi$$

En tenant compte du résultat de la question précédente :

$$\boxed{\mathrm{D} = i + i' - \mathrm{A}}$$



3.1 - Les angles intervenant dans ce problème ont des valeurs comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.
En I', il y a passage d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent donc possibilité de réflexion totale. Pour éviter ce phénomène, l'angle r' doit satisfaire l'inégalité suivante :

$$r' \leqslant \arcsin\frac{1}{n}$$

De même, en utilisant le principe du retour inverse de la lumière, l'angle r vérifie également cette inégalité.
On en déduit d'après les égalités établies dans la question 2 :

$$\boxed{\mathrm{A} \leqslant 2.\arcsin\frac{1}{n}}$$

3.2 - $r \leqslant \arcsin\frac{1}{n}$ implique $i \leqslant \frac{\pi}{2}$.
En outre $r' \leqslant \arcsin\frac{1}{n}$ implique $r \geqslant \mathrm{A} - \arcsin\frac{1}{n}$
et d'après la loi de Snell-Descartes pour la réfraction en I : $i \geqslant i_0$ avec i_0 tel que :

$$\sin i_0 = n.\sin\left[\mathrm{A} - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

En conclusion :

$$\boxed{i_0 \leqslant i \leqslant \frac{\pi}{2}}$$

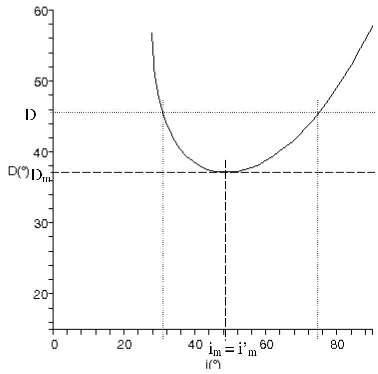
4 - Les résultats de la quesion 2 conduisent à :

$$\begin{cases} r = \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin i\right) \\ i' = \arcsin\left(n\sin r'\right) \\ r' = \mathrm{A} - r \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{D}(i) = i + \arcsin\left(n \sin\left(\mathrm{A} - \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin i\right)\right)\right) - \mathrm{A}}$$

On obtient le graphe suivant :



Effectuons un raisonnement graphique.
S'il y a émergence pour une incidence i donnée, le principe du retour inverse de la lumière permet de montrer qu'on obtient la même déviation D pour une incidence i' définie par les relations de la question 2.
Alors au minimum de déviation :

$$\boxed{i = i' = i_m \text{ donc } r = r' = r_m}$$

et donc :

$$i_m = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{D}_m}{2}$$

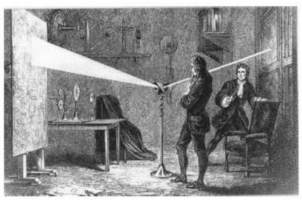
$$r_m = \frac{\mathrm{A}}{2}$$

On en conclut sachant que $\sin i_m = n.\sin r_m$

$$\boxed{n = \frac{\sin\left(\dfrac{\mathrm{A} + \mathrm{D}_m}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\mathrm{A}}{2}\right)}}$$

Les petits plus **CULTURE**

Expérience historique de Newton



C'est en se posant la question suivante « Pourquoi un prisme de verre donne-t-il des couleurs à la lumière du Soleil ? » que Newton en 1666 montra expérimentalement que la lumière blanche est une lumière polychromatique. Ce résultat mit en défaut la conception d'Aristote : la lumière est naturellement blanche et les couleurs naissent progressivement de son affaiblissement.