Série I

Problème I.1

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(xy) = f(f(x) + f(y))$$

quels que soient les réels x, y.

Problème I.2

Déterminer tous les entiers n vérifiant

$$\frac{7n-12}{2^n} + \frac{2n-14}{3^n} + \frac{24n}{6^n} = 1.$$

Problème I.3

Sur un demi-cercle de diamètre $[DE]$, on place deux points B et C tels que $BD+CE = DE$. Montrer que si A est le point d'intersection des droites (BD) et (CE), alors

$$\frac{2}{BC} \leq \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

Problème I.4

Les nombres premiers $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ satisfont $p_{k+1} = 2p_k + 1$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq 6} p_i p_j$ est divisible par 15.

Problème I.5

Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'équation

$$\sqrt[5]{\sqrt{x}+3} + \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = \sqrt[5]{\sqrt{x}-3} + \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}.$$

(Pour n impair, $\sqrt[n]{r}$ désigne l'unique réel dont la puissance n-ième est r.)

Problème I.6

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont ainsi définies : $u_0 = 4,\ u_1 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 8t^2 u_{n+1} + \left(t - \frac{1}{2}\right) u_n \qquad \text{et} \qquad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

Pour quelles valeurs du réel t la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une suite géométrique non constante ?

Problème I.7

Soient ABC un triangle avec $BC = a, CA = b, AB = c$, r le rayon de son cercle inscrit et r_a, r_b, r_c les rayons des cercles exinscrits dans ses angles A, B, C (respectivement). Prouver les relations suivantes :

1/ $(r_b - r_c)\cos A + (r_c - r_a)\cos B + (r_a - r_b)\cos C = 0$

2/ $\dfrac{r_b + r_c}{\sin A} + \dfrac{r_c + r_a}{\sin B} + \dfrac{r_a + r_b}{\sin C} = \dfrac{abc}{2r^2}$.

Problème I.8

Quels sont les réels x, y, z vérifiant à la fois $x + y + z \geq 3$ et

$$x^3 + y^3 + z^3 + x^4 + y^4 + z^4 \leq 2(x^2 + y^2 + z^2)\,?$$

Série II

Problème II.1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'entiers définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n$ pour tout entier naturel n. Si $b_n = a_{n+8} + 8a_{n+4} + 16a_n$ et $c_n = a_{n+8} - 16a_n$, déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{pgcd}(b_n, b_{n+1})$ et $\operatorname{pgcd}(c_n, c_{n+1})$.

Problème II.2

Soient ABC un triangle équilatéral de côté a et P un point de la droite (BC) tel que $AP = 2x > a$. Soit M le milieu de $[AP]$. Sachant que

$$\frac{BM}{x} = \frac{BP}{a} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{CM}{x} = \frac{CP}{a} = \beta,$$

quels sont les réels x, α, β ?

Problème II.3

Pour quels entiers n existe-t-il des entiers x, y tels que

$$\frac{3xy - 1}{x + y} = n \ ?$$

Problème II.4

Soient A, B, C, D des points distincts sur un cercle de rayon r. Montrer que

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + AC^2 + BD^2 \leq 16r^2.$$

Caractériser les cas d'égalité.

Problème II.5

Montrer que

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{\sin \frac{k\pi}{7}}{\sin \frac{(3k+7)\pi}{21}} = 0.$$

Problème II.6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant $f(xf(y)) = yf(x)$ pour tous réels x, y.

1/ Montrer que f est une fonction impaire.

2/ Déterminer f sachant qu'elle a exactement une discontinuité.

Problème II.7

Soient a, b des réels strictement positifs. Montrer que pour tout réel c, on a

$$\operatorname{sh} c = \frac{1 - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} a + \operatorname{sh} b} \qquad \text{si et seulement si} \qquad e^c = \frac{e^a + e^b}{e^a\, e^b - 1}.$$

Problème II.8

Soient $ABCD$ un quadrilatère du plan et C', D' les projetés orthogonaux de C, D sur la droite (AB). Montrer que si les perpendiculaires à (AD) et à (BC) passant respectivement par C et D se coupent en P et les perpendiculaires à (AD) et à (BC) passant respectivement par C' et D' se coupent en Q, alors (PQ) est perpendiculaire à la droite passant par les milieux de $[AC]$ et $[BD]$.

Série III

Problème III.1

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = 1$, $x_1 = 2\,011$ et $x_{n+2} = 2\,012x_{n+1} - x_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\frac{(2\,010 + x_n^2 + x_{n+1}^2)(2\,010 + x_{n+2}^2 + x_{n+3}^2)}{(2\,010 + x_{n+1}^2)(2\,010 + x_{n+2}^2)}$$

est indépendant de n.

Problème III.2

Trouver le plus petit entier $n \geq 1$ tel que la suite des chiffres de l'entier $5^{2\,001}$ soit exactement la suite des derniers chiffres de $5^{2\,001+n}$.

Problème III.3

Soient R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit du triangle ABC et soient $\delta_a, \delta_b, \delta_c$ les distances respectives du centre de gravité aux côtés $[BC], [CA], [AB]$. Démontrer que

$$\sqrt{r} \leq \frac{\sqrt{\delta_a} + \sqrt{\delta_b} + \sqrt{\delta_c}}{3} \leq \sqrt{\frac{R}{2}}.$$

Problème III.4

Soit n un entier avec $n \geq 2$. Montrer que si

$$\binom{n-2}{k} \equiv (-1)^k(k+1) \pmod{n}$$

pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, alors n est un nombre premier.

Problème III.5

Pour chaque entier $m \geq 1$, soit $S(m)$ la somme de tous les rationnels $\dfrac{n}{m}$ où n satisfait $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = \lfloor \sqrt{m} \rfloor$ (si a est un réel, $\lfloor a \rfloor$ désigne sa partie entière).

Trouver tous les entiers m tels que

1/ $S(m) = 2\,001$

2/ $S(m) = 2\,002$.

Problème III.6

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de matrices carrées d'ordre 2, à coefficients complexes, tel que $ABCAB = C$ pour tous éléments A, B, C de $\mathcal{S}$.

1/ Montrer que si A, B, C sont dans $\mathcal{S}$, alors $(ABC)^n = A^n B^n C^n$ pour tout entier $n \geq 1$.

2/ Donner un exemple d'un tel ensemble $\mathcal{S}$, de cardinal au moins 3, contenant deux matrices qui ne commutent pas.

Problème III.7

Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-k}{n} = 1.$$

Problème III.8

Trouver la plus grande constante λ pour laquelle l'inégalité

$$\frac{1}{r} > \lambda \left(\frac{1}{\min(a,b,c)} - \frac{1}{\max(a,b,c)} \right)$$

est vraie pour tout triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b, c et le cercle inscrit a pour rayon r.

Série IV

Problème IV.1

Soit F la suite de Fibonacci définie par $F(1) = F(2) = 1$ et, pour tout entier $n > 2$, la relation $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$. Pour tout entier $n > 6$, soit $G(n) = F(n+6) + 3F(n+2) + 3F(n-2) + F(n-6)$. Calculer le pgcd de $G(F(6\,666))$ et $G(F(666))$.

Problème IV.2

Soient ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et O le centre de son cercle circonscrit. Les droites $(AO), (BO), (CO)$ coupent à nouveau les cercles circonscrits des triangles BCO, CAO, ABO respectivement en A', B', C'. Si $|XYZ|$ et $[XYZ]$ désignent le périmètre et l'aire du triangle XYZ, montrer que

1/ $\dfrac{BC}{|BCA'|} + \dfrac{CA}{|CAB'|} + \dfrac{AB}{|ABC'|} = 1$

2/ $[BCO][BCA'] + [CAO][CAB'] + [ABO][ABC'] = [ABC]^2$.

Problème IV.3

Soit $r \in \mathbb{Q}^{*+}$. Montrer que si r^r est rationnel, alors r est un entier.

Problème IV.4

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$x^2y^2(f(x+y) - f(x) - f(y)) = 3(x+y)f(x)f(y)$$

pour tous réels x, y.

Problème IV.5

ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A. Soient J le point de l'hypoténuse $[BC]$ tel que $CJ = HB$ et K, L les projetés orthogonaux de J sur $(AB), (AC)$ (respectivement). Montrer que

$$\mathcal{M}(-\frac{2}{3}\,;\, AK, AL) \leq \frac{1}{2}\mathcal{M}(-2\,;\, AB, AC)$$

où $\mathcal{M}(\alpha\,;\, x, y) = \left(\dfrac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{1/\alpha}$.

Problème IV.6

Soit m un réel strictement positif. Si les réels a, b, c sont assujettis à

$$a(a-b) + b(b-c) + c(c-a) = m,$$

quel est l'ensemble des valeurs prises par $ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$?

Problème IV.7

Soient n un entier vérifiant $n \geq 2$ et z un complexe tel que $|z| \leq 1$. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k z^{n-k} \neq 0.$$

Problème IV.8

Soient A, B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes telles que $A^2 = A = AB$. Montrer que $B^2 = B = BA$ si et seulement si A et B ont même rang.
