Chapitre I
Les Equations de Maxwell

Dans ce chapitre les équations de Maxwell, qui décrivent le comportement des champs électromagnétiques, sont considérées. Les champs électromagnétiques en régime permanent sont des champs harmoniques dans le temps et appelées ondes continues ou encore ondes monochromatiques.

Parmi les avantages du traitement des champs par des ondes monochromatiques on trouve la simplicité mathématique (élimination de la dépendance avec le temps), et la possibilité d'application de la Transformée de Fourier dans l'étude des phénomènes dans le domaine temporel.

I.1 Résolution dans un milieu non ionisé

Les Equations de Maxwell décrivent l'évolution et l'interaction entre deux types de champs vectoriels : les champs électriques $\vec{E}$ et les champs magnétiques $\vec{H}$.

En fait, avant le développement des équations de Maxwell nous allons regarder de plus près la relation entre les champs électriques $\vec{E}$ et les champs magnétiques $\vec{H}$. L'équation de force de Lorentz exprime la force sur une charge q en mouvement avec une vitesse $\vec{v}$ sous l'action du champ électrique $\vec{E}$ et de l'induction magnétique $\vec{B}$ donné par

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad \text{(I-1)}$$

D'après (I-1), la force sur la charge dépend du champ électrique $\vec{E}$ et de l'induction magnétique $\vec{B}$, mais non du champ magnétique $\vec{H}$. Du point de vue physique, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont des champs fondamentaux, alors que les champs $\vec{D}$ et $\vec{H}$ sont dérivés des deux premiers. Leur rapport est décrit par les relations constitutives, dont nous reviendrons plus tard.

Le vecteur $\vec{E}$ est un vecteur polaire, ou vrai vecteur. Il a le comportement d'un vecteur déplacement élémentaire.

$\vec{H}$ est un vecteur axial. Il a le comportement d'un produit vectoriel.

Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{I-2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{I-3}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{I-4}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_V \tag{I-5}$$

On adopte les hypothèses suivantes :

- Régime harmonique – les champs, vecteurs, ont un comportement sinusoïdal dans le temps et, par conséquent, on pose : $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$
- Milieux homogènes (éventuellement par morceaux, voir Figure I-1) – les caractéristiques, électriques ainsi que magnétiques, des milieux sont constantes.
- Milieux linéaires et isotropes – les caractéristiques, électriques ainsi que magnétiques, sont indépendantes de l'amplitude et de la direction du champ à l'intérieur du milieu. Cette dernière est indépendante de la position spatiale.
- Non dispersive – les caractéristiques des milieux ne changent pas avec la fréquence.
- Milieux non ionisé – les milieux n'ont pas de charges libres à l'intérieur et ne présentent pas de polarisations lors de la présence du champ.

Dans ces conditions, on aura les relations constitutives des champs dans les milieux suivants :

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \qquad \text{et} \qquad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

ε et μ sont respectivement la permittivité et la perméabilité du milieu considéré. Ils contiennent les informations sur les caractéristiques du milieu.

Dans la pratique, ces caractéristiques des matériaux, électriques et magnétiques, sont décrites par rapport à celle du vide.

On a

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

μ_r et ε_r sont appelées constantes diélectriques et magnétiques.

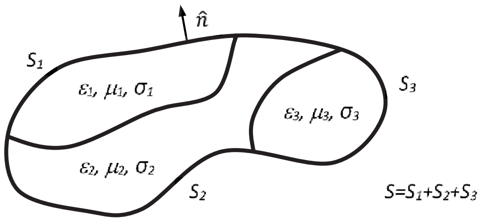


Figure I-1 : Exemple de section droite S d'un milieu homogène par morceaux

Les premières équations s'écrivent alors :

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \tag{I-6}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{E} \tag{I-7}$$

Les équations (I-4) et (I-5) sont naturellement vérifiées. Le $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ s'obtient en prenant la divergence des deux membres de (I-6) et l'autre équation par divergence des deux membres de (I-7) qui donne :

$$\nabla \cdot \vec{J} + j\omega\varepsilon\nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{I-8}$$

avec (I-5) on obtient

$$\nabla \cdot \vec{J} + j\omega\varepsilon\frac{\rho_V}{\varepsilon} = 0 \tag{I-9}$$

L'équation (I-9) exprime la conservation de la charge électrique, aussi appelée l'équation de la continuité de la charge.

Par suite les équations (I-6) et (I-7) suffisent pour étudier le comportement des ondes dans un milieu diélectrique et magnétique homogène.

La première exploration de ces équations consiste à éliminer dans les équations (I-6) et (I-7) un des deux champs. On prend pour cela le rotationnel des deux membres de l'équation (I-6), puis on élimine le rotationnel de $\vec{H}$.

On a successivement :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\nabla \times \vec{H}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \omega^2\mu\varepsilon\vec{E} - j\omega\mu\vec{J} \tag{I-10}$$

D'où l'équation de propagation (on pose $k_0^2 = \omega^2\mu\varepsilon$)

$$[\nabla \times \nabla \times -k_0^2]\vec{E} = j\omega\mu\vec{J} \qquad \text{(I-11)}$$

Dans le vide non chargé, $\rho_V = 0$, on a $\nabla \cdot \vec{E} = 0$.

L'équation (I-11) est alors écrite ainsi :

$$[\nabla^2 + k_0^2]\vec{E} = j\omega\mu\vec{J} \qquad \text{(I-12)}$$

On a utilisé l'identité : $\nabla \times \nabla \times \vec{A} \equiv \nabla\nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2\vec{A}$.

Cette équation (dite de Helmholtz) d'écrit bien l'objectif de la résolution de (I-12). Cette équation comporte deux membres.

Le premier est un opérateur différentiel linéaire qui agit sur un champ de vecteurs inconnus. Le second membre est une densité de courants a priori imposée que l'on peut considérer connue des sources.

Ainsi, comme l'opérateur de Helmholtz est local (présence des dérivées), son inverse est non-local, comme l'est la primitive à l'égard de la dérivée, et donc explique le fait que l'action des sources s'exprime à distance.

On peut résumer ceci en écrivant :

$$\widehat{\mathrm{H}} = [\nabla^2 + k_0^2],$$

Où $\widehat{\mathrm{H}}$ est l'opérateur de Helmholtz.

L'équation (I-12), avec l'utilisation de la notation $\widehat{\mathrm{H}}\{\cdot\}$, s'écrit alors :

$$\widehat{\mathrm{H}}\{\vec{E}\} = j\omega\mu\vec{J}$$

D'où

$$\vec{E} = j\omega\mu\widehat{\mathrm{H}}^{-1}\{\vec{J}\} \qquad \text{(I-13)}$$

L'équation (I-13) n'a de sens que si l'opérateur $\widehat{\mathrm{H}}$ est régulier. Il l'est toujours dans le cas statique (à fréquence telle que le terme en k_0^2 peut être négligé). Par contre, dans tous les phénomènes de résonance on constate qu'il existe une solution $\vec{E}_{res}$ telle que

$$\widehat{\mathrm{H}}\{\vec{E}_{res}\} = 0 \qquad \text{(I-14)}$$

Ces solutions sans sources sont approchées dans des résonateurs à supraconducteurs de telle manière que l'onde (solution sans second membre) oscille pendant une durée de l'ordre de la seconde après l'extinction de la source.

D'autres solutions existent quand les sources sont rejetées à l'infini (il en est aussi de la puissance de ces sources qui tend vers l'infini).

C'est le cas des ondes planes et des ondes dans des guides infinis.

Il existe une autre différence entre les cas statiques et ceux issus de l'équation de Helmholtz. C'est la portée des interactions. Celle-ci est en général plus importante pour le cas de Helmholtz que pour le cas statique.

Cela est dû au courant de déplacement qui existe dans le vide et qui favorise ainsi l'existence de couplages entre courants et champs. Ainsi pour les champs lointains d'une antenne monopole, la variation du champ électrique est en $1/r$ alors que pour une charge en électrostatique il varie en $1/r^2$.

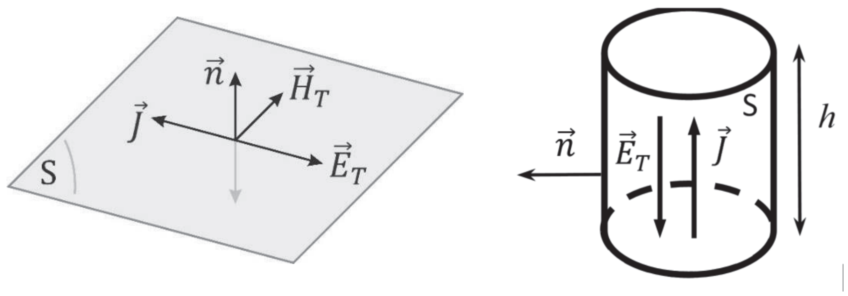
On peut remarquer aussi que les grandeurs en présence dans (I-12) sont « duales », elles sont de même espèce (vecteurs polaires), et que leur produit scalaire est homogène a une puissance. On peut le voir à la formule pour calculer la puissance dissipée par un conducteur :

$$P_{disp} = \int \vec{J} \cdot \vec{E} dV_{volume}$$

$$P_{disp} = \vec{J} \cdot \vec{E} \int dV_{volume} = \vec{J} S \cdot \vec{E} h$$

$$P_{disp} = I \cdot V$$

On a utilisé la définition de la densité de courant et la différence du potentiel pour un champ uniforme confiné à l'intérieur du milieu (illustrée par la Figure I-2-b).



a) b)

Figure I-2 : Exemple des deux vecteurs duaux ($\vec{E}_T$ et $\vec{J}$). (a) Surface S planaire conductrice (b) surface S cylindrique conductrice de longueur h

La question qui se pose est la suivante :

Y a-t-il d'autres couples de grandeurs duales qui permettent de mettre au point des équations analogues à (I-12) ?

On peut en citer quelques-uns.

- Pression-vitesse : $\vec{p} \cdot \vec{v}$
- Définis sur une surface S : $\vec{E}_T \cdot \vec{H} \times \vec{n}$

$\vec{E}_T$ est le champ tangent à la surface S, $\vec{n}$ le vecteur normal à surface. La puissance correspondante est égale au flux du vecteur de Poyinting.

- Tension et intensité : V, I. Avec l'énergie VI
- Densité de charges ρ et le potentiel V. Avec l'énergie ρV.

I.2 Equation de Helmholtz par la méthode des fonctions propres

Les équations linéaires sont de la forme :

$$\hat{\mathrm{L}}u = f$$

Où $\hat{\mathrm{L}}$ est un opérateur linéaire, f est une fonction connue et u est une fonction complexe inconnue. Dans cet ouvrage on utilisera la méthode des fonctions propres, dans laquelle une représentation spectrale de l'opérateur $\hat{\mathrm{L}}$ est obtenue à partir de l'équation.

$$\hat{\mathrm{L}}u = \lambda u$$

Reproduisons l'équation (I-12) avec l'opérateur de Helmholtz :

$$\widehat{\mathrm{H}}\{\vec{E}\} = j\omega\mu\vec{J} \qquad \text{(I-15)}$$

f_n un ensemble de fonctions à trois composantes qui sont des fonctions propres du l'opérateur $\widehat{\mathrm{H}}$ avec λ_n les valeurs propres associés.

$$\widehat{\mathrm{H}}f_n = \lambda_n f_n \qquad \text{(I-16)}$$

On montre (voir exercice en fin de chapitre) que si deux valeurs propres sont différentes, alors les deux fonctions correspondantes sont orthogonales. C'est-à-dire :

$$\int f_m^{*t} f_n d^3\vec{r} = 0 \qquad \text{si } m \neq n,$$

$$\int f_m^{*t} f_n d^3\vec{r} = 1 \qquad \text{si } m = n,$$

dans ce dernier cas le mode est dit normé. L'indice *t* représente la transposée et * le complexe conjugué.

On écrit aussi en notation de Dirac (en utilisant les bra et ket).

$$\langle f_m / f_n \rangle = \int [f_{mx}^* \quad f_{my}^* \quad f_{mz}^*] \begin{bmatrix} f_{mx} \\ f_{my} \\ f_{mz} \end{bmatrix} d^3\vec{r} \qquad \text{(I-17)}$$

Reprenons l'équation (I-15), et posons E_T une fonction inconnue ou, un ensemble infini non dénombrable d'inconnues. Si on désire un traitement non analytique, on sera amené à remplacer $\vec{E}(x, y, z)$ dans le cas d'un problème à symétrie rectangulaire par un ensemble d'inconnues en nombre fini, ensemble qui se prête bien au calcul matriciel.

$\boldsymbol{E_T}$ est maintenant un vecteur décrit dans un espace à N dimension.

On pose :

$$E = \sum_{n=1}^{N} E_n f_n$$

f_n est une fonction propre de l'opérateur $\widehat{\mathrm{H}}$. C'est loin d'être indispensable (on peut prendre des fonctions échelons, les ondelettes ou de sinusoïdes).

Les choix de f_n, fonction propre de $\widehat{\mathrm{H}}$ simplifie les calculs. Ainsi en utilisant (I-15)

$$\widehat{\mathrm{H}}E = \sum_{n=1}^{N} E_n \lambda_n f_n = j\omega\mu\vec{J} \qquad \text{(I-18)}$$

et en projetant J sur chaque f_m, on obtient avec (I-16)

$$E_m \lambda_m = j\omega\mu \langle f_m / J \rangle \qquad \text{(I-19)}$$

D'où le champ électrique (on tire E_m de (I-19)) :

$$E = \sum_m E_m f_m = j\omega\mu \sum_{m=1}^{N} f_m \frac{1}{\lambda_m} \langle f_m / J \rangle \qquad \text{(I-20)}$$

On peut écrire (I-20) avec l'intégrale du produit scalaire :

$$\vec{E}(\vec{r}) = j\omega\mu \sum_{m=1}^{N} f_m(\vec{r}) \frac{1}{\lambda_m} \int f_m^{*t}(\vec{r}') J'(\vec{r}') d^3\vec{r}' \qquad \text{(I-21)}$$

Dans (I-21), on voit apparaître la fonction de Green.

$$G(\vec{r}, \vec{r}') \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{N} -\frac{f_m(\vec{r}) f_m^{*t}(\vec{r}')}{\lambda_m} \qquad \text{(I-22)}$$

Alors,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu \int G(\vec{r}, \vec{r}') J'(\vec{r}') d^3\vec{r}' \qquad \text{(I-23)}$$

L'intégral est étendue à tout l'espace. Si on applique à la fonction de green l'operateur $\widehat{\mathrm{H}}$, on trouve :

$$\widehat{\mathrm{H}} G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{m=1}^{N} -\lambda_m \frac{f_m(\vec{r}) f_m^{*t}(\vec{r}')}{\lambda_m} \qquad \text{(I-24)}$$

On a donc

$$\widehat{\mathrm{H}} G(\vec{r}, \vec{r}')\{.\} = -\sum_{m=1}^{N} f_m(\vec{r}) f_m^{*t}(\vec{r}')\{.\} \qquad \text{(I-25)}$$

En écriture de Dirac, cette fonction s'écrit :

$$\widehat{\mathrm{H}} G(\vec{r}, \vec{r}')\{.\} = -\sum_{m=1}^{N} f_m(\vec{r}) \langle f_m^{*t}(\vec{r}') / . \rangle \qquad \text{(I-26)}$$

Si on applique cette expression sur une fonction *f* arbitraire on a :

$$\int \widehat{\mathrm{H}} G(\vec{r}, \vec{r}') f\left(\overrightarrow{r'}\right) d^3\vec{r}' = -\sum_{m=1}^{N} f_m(\vec{r}) \langle f_m^{*t}(\vec{r}') / f(\vec{r}') \rangle \qquad \text{(I-27)}$$