Chaque candidat est responsable de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème I

1) Un exemple de réduction simultanée d'une famille de matrices

Pour tout triplet (a,b,c) appartenant à $\mathbf{R}^3$, nous noterons $M(a,b,c)$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par : $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

Nous noterons $I = M(1,0,0)$ la matrice unité, $J = M(0,1,0)$ et $K = M(0,0,1)$.

a) Sans aucun calcul, montrer que J et K sont diagonalisables.

b) Recherche des éléments propres de K

i) Déterminer les valeurs propres de K.

ii) Pour chaque valeur propre de K, déterminer une base du sous-espace propre associé.

Les vecteurs intervenant seront choisis de troisième composante égale à 1.

c) Recherche des éléments propres de J

i) Déterminer les valeurs propres de J.

ii) Pour chaque valeur propre de J, déterminer une base du sous-espace propre associé.

d) Recherche de vecteurs propres communs à J et K

i) Montrer que : Vect $((1,0,1),(0,1,0))$ = Vect $((1,\sqrt{2},1),(1,-\sqrt{2},1))$.

ii) En déduire une matrice P inversible appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}KP$ et $P^{-1}JP$ soient diagonales.

La dernière ligne de P sera constituée uniquement de 1.

e) En déduire une base de $\mathbf{R}^3$ permettant pour tout (a,b,c) appartenant à $\mathbf{R}^3$, de diagonaliser la matrice $M(a,b,c)$ et donner une matrice diagonale D semblable à $M(a,b,c)$.

2) Réduction simultanée de deux matrices dans le cas général

Considérons deux matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

Dans toute cette question, on suppose que A et B sont diagonalisables et que : $AB = BA$.

$(E,+,.)$ désigne un espace vectoriel réel de dimension 3, $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ désigne une base de E.

Considérons les endomorphismes f et g de E définis par : $\begin{cases} \operatorname{Mat}(f,\mathcal{E}) = A \\ \operatorname{Mat}(g,\mathcal{E}) = B. \end{cases}$

μ étant une valeur propre de f, $E_\mu(f)$ désigne le sous-espace propre de f associé à la valeur propre μ de f.

λ étant une valeur propre de g, $E_\lambda(g)$ désigne le sous-espace propre de g associé à la valeur propre λ de g.

a) λ étant une valeur propre de g, $\overrightarrow{x}$ appartenant à $E_\lambda(g)$, montrer que :

$$g\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = \lambda f\left(\overrightarrow{x}\right),$$

et en déduire que $f\left(\overrightarrow{x}\right)$ appartient à $E_\lambda(g)$.

b) Nous supposons dans cette question que B admet une unique valeur propre λ.

i) Montrer que : $B = \lambda I_3$, I_3 représentant la matrice identité.

ii) Justifier alors l'existence d'une matrice P inversible appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que les matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

c) Nous supposons dans cette question que B admet trois valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

i) λ étant une valeur propre de B, quelle est la dimension de $E_\lambda(g)$?

ii) λ étant une valeur propre de B, $\overrightarrow{x}$ un vecteur non nul appartenant à $E_\lambda(g)$, montrer qu'il existe un réel μ tel que : $f\left(\overrightarrow{x}\right) = \mu\overrightarrow{x}$.

iii) Montrer alors l'existence d'une base de E constituée de vecteurs propres communs à f et g.

d) Nous supposons dans cette question que B admet deux valeurs propres distinctes λ_1, λ_2.

i) Montrer que : $E = E_{\lambda_1}(g) \oplus E_{\lambda_2}(g)$.

ii) μ désigne une valeur propre de f.

Soit $\overrightarrow{x}$ appartenant à $E_\mu(f)$, justifier l'existence de $\overrightarrow{x_1}$ appartenant à $E_{\lambda_1}(g)$ et de $\overrightarrow{x_2}$ appartenant à $E_{\lambda_2}(g)$ tels que : $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}$, puis montrer que $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{x_2}$ appartiennent à $E_\mu(f)$.

iii) μ désigne toujours une valeur propre de f.

Montrer alors que : $(E_\mu(f) \cap E_{\lambda_1}(g)) \oplus (E_\mu(f) \cap E_{\lambda_2}(g)) = E_\mu(f)$.

En déduire l'existence d'une base de $E_\mu(f)$ constituée de vecteurs propres de g.

iv) En déduire l'existence d'une base de E constituée de vecteurs propres communs à f et g.

Problème II : vers la formule de Stirling

1) Intégrales de Wallis

Dans tout ce problème, pour tout entier naturel n, nous noterons :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos(\theta))^n \,\mathrm{d}\theta.$$

a) Calculer W_0 et W_1.

b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel n :

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

c) En déduire que pour tout entier naturel n : $(n+1)W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}\cdot$

d) Montrer que pour tout entier naturel n : $W_n \geq W_{n+1} \geq W_{n+2} > 0$, et en déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$, du rapport $\dfrac{W_{n+1}}{W_n}\cdot$

e) Déduire des questions précédentes que : $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}\cdot$

Nous admettons dans la suite du problème que pour toute fonction $u : [0, \pi/2] \to \mathbf{R}$ continue sur $[0, \pi/2]$ et ne s'annulant pas en 0 :

$$\int_0^{\pi/2} u(\theta)(\cos(\theta))^n \,\mathrm{d}\theta \underset{n\to+\infty}{\sim} u(0)W_n.$$

2) Étude d'une suite

Considérons la suite u définie par : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = 1 - \mathrm{e}^{-n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\cdot$

a) Limite de la suite u

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi de Poisson de paramètre 1.

i) n désignant un entier naturel non nul, quelle est la loi de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$? Quelle est la valeur de $P(S_n \leq n)$?

ii) À l'aide du théorème de la limite centrée, que peut-on dire de la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ T_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$?

iii) En déduire que la suite u converge vers $\dfrac{1}{2}\cdot$

b) Expression intégrale du terme général de la suite u

i) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

ii) En déduire par un changement de variable, que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \int_0^n \frac{s^n}{n!}\mathrm{e}^{-s} \,\mathrm{d}s.$$

3) Mise en place d'un changement de variable

Considérons la fonction f définie sur $[0, 1]$ par : $\forall x \in [0, 1],\ f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.

a) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $[0, 1]$.
En déduire l'existence d'un développement limité à tout ordre pour f et pour f' au voisinage de 1.

Calculer le développement limité à l'ordre 2 de f en 1, et celui à l'ordre 1 de f' en 1.
En déduire alors un équivalent simple de $1-f(x)$ et $f'(x)$ en 1.

b) Montrer que f réalise une bijection du segment $[0,1]$ dans lui-même.
f^{-1} désigne donc la bijection réciproque de f.

c) Montrer que : $1-f^{-1}(y) \underset{y\to 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-y)}$.

d) Justifier que f^{-1} est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1[$, préciser une expression de $(f^{-1})'$ et montrer que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

e) Montrer que la fonction $g : \theta \longmapsto f'(f^{-1}(\cos(\theta)))$ est définie et continue sur $[0,\pi/2]$, et déterminer un équivalent de g en 0^+.

f) Montrer que la fonction $h : \theta \longmapsto \dfrac{\sin(\theta)}{g(\theta)}$ est définie et continue sur $]0,\pi/2]$, et est prolongeable par continuité en 0.
Dans la suite, h désigne la fonction ainsi prolongée.

4) Une autre expression du terme général de la suite u

a) Un premier changement de variable

Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{n^{n+1}\mathrm{e}^{-n}}{n!}\displaystyle\int_0^1 (t\mathrm{e}^{1-t})^n \,\mathrm{d}t$.

b) Un second changement de variable plus délicat

n désigne un entier naturel non nul,
notons pour tout réel x appartenant à $[0,1]$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x (t\mathrm{e}^{1-t})^n \,\mathrm{d}t$.

i) Que représente la fonction F ?
En déduire que F est en particulier continue en 1.

ii) À l'aide du changement de variable $t = f^{-1}(\cos(\theta))$, $\theta \in]0,\pi/2]$, montrer que pour tout réel x appartenant à $[0,1[$:

$$F(x) = \int_{\operatorname{Arc}\cos(f(x))}^{\pi/2} (\cos(\theta))^n h(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Les fonctions f et h ont été définies à la question 3).

iii) En déduire que : $\displaystyle\int_0^1 (t\mathrm{e}^{1-t})^n \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (\cos(\theta))^n h(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, puis que :

$$u_n = \frac{n^{n+1}\mathrm{e}^{-n}}{n!}\int_0^{\pi/2} (\cos(\theta))^n h(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

5) Enfin la formule de Stirling

Montrer que :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

FIN DE L'ÉPREUVE

Corrigé

Rapport du jury

L'épreuve était variée, faite pour tester les capacités de calcul en algèbre et en analyse, et la compréhension des concepts.
Les copies sont globalement bien présentées et le jury incite les candidats à continuer dans cette voie. Une réponse bien rédigée est justement évaluée, le jury rappelle qu'une rédaction douteuse laisse place à l'appréciation du correcteur et malheureusement souvent en défaveur du candidat.
Les candidats sont techniquement au point !
Par exemple, la démarche pour obtenir les valeurs propres ou vecteurs propres d'une matrice est bien menée, même si la forme laisse souvent à désirer.

Malheureusement, les candidats semblent théoriquement beaucoup plus fragiles.
Les questions de synthèse où le candidat doit enchaîner plusieurs arguments dans un ordre logique,
- les vérifications d'hypothèses avant l'utilisation d'une propriété du cours,
- les questions où le candidat doit faire preuve d'initiative,
- les questions techniques mais en dehors des situations habituelles, mettent en avant des doutes sur la compréhension des concepts manipulés.

Ce phénomène a certes toujours été présent mais a plus marqué le jury sur cette épreuve.

Problème I

1) a) Par définition, on a de suite :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, les matrices J et K sont symétriques réelles donc elles sont diagonalisables.

Rapport du jury

En général, mal traitée avec des réponses très fantaisistes (J est diagonale ou la transposée de la matrice unité, K n'a pas de zéros sur la diagonale,...).
Peu de candidats ont vu que J et K étaient symétriques, et parmi ceux-ci, un grand nombre a oublié d'ajouter que J et K étaient réelles.

b) i) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Étudions le système homogène de matrice $K - \lambda I$, c'est-à-dire le système (S_λ) défini par :

$$\begin{cases} -\lambda x + y = 0 \\ x - \lambda y + z = 0 \\ y - \lambda z = 0 \end{cases}.$$

Le système (S_λ) est alors successivement équivalent aux systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & \lambda y & + & z & = & 0 \quad L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ -\lambda x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & - & \lambda z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & \lambda y & + & z & = & 0 \\ & & (1-\lambda^2)y & + & \lambda z & = & 0 \quad L_2 \longleftarrow L_2 + \lambda L_1 \\ & & y & - & \lambda z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & \lambda y & + & z & = & 0 \\ & & (1-\lambda^2)y & + & \lambda z & = & 0 \\ & & (2-\lambda^2)y & & & = & 0 \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

Finalement, en intervertissant les deux dernières colonnes du système ci-dessus, on peut écrire :

$$(S_\lambda) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & z & - & \lambda y & = & 0 \\ & & \lambda z & + & (1-\lambda^2)y & = & 0 \\ & & & & (2-\lambda^2)y & = & 0 \end{array}\right.$$

Par conséquent, le système (S_λ) n'est pas de Cramer si et seulement si le système triangulaire ci-dessus possède au moins un coefficient diagonal nul. Bref, (S_λ) n'est pas de Cramer si et seulement si :

$$\lambda = 0 \text{ ou } 2 - \lambda^2 = 0.$$

En d'autres termes,

$$\boxed{\operatorname{Sp} K = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}.}$$

Il est évident que 0 est valeur propre de K. En effet, comme la première colonne de K et la troisième colonne de K sont identiques, K n'est pas inversible et donc 0 en est valeur propre.
Ceci se retrouve aussi rapidement à partir du système (S_λ). En effet, l'analyse de la première et de la troisième lignes de (S_λ) montre que $\lambda x = \lambda z$ donc si $\lambda = 0$, on peut immédiatement dire que le système (S_λ) n'est pas de Cramer et donc que 0 est valeur propre de K. On peut alors poursuivre l'étude des recherches des valeurs propres non nulles de K, ce qui implique notamment $x = z$.

Notons enfin que l'on retrouve ici le fait que K est diagonalisable. En effet, K est une matrice carrée d'ordre 3 possédant 3 valeurs propres distinctes.

> Rapport du jury
>
> Globalement réussie par les candidats.
> Les maladresses habituelles en petit nombre : choix d'un pivot qui peut s'annuler, discussion mal gérée...
> K a jusque 5 valeurs propres.

ii) • Déterminons $E_0(K)$.

D'après l'étude faite à la question précédente, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(K) \iff x + z = 0 \text{ et } y = 0.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$E_0(K) = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\neq 0}\right).$$

En d'autres termes,

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_0(K).}$$

On pourra prendre un instant pour vérifier :

$$K\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• Déterminons $E_{-\sqrt{2}}(K)$.
D'après l'étude faite à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-\sqrt{2}}(K) &\iff x + z + \sqrt{2}y = 0 \text{ et } -\sqrt{2}z - y = 0 \\ &\iff y = -\sqrt{2}z \text{ et } x = -z - \sqrt{2}y = -z + 2z = z. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire :

$$E_{-\sqrt{2}}(K) = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\neq 0}\right).$$

En d'autres termes,

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_{-\sqrt{2}}(K).}$$

Là encore, on pourra prendre un instant pour vérifier :

$$K\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• Déterminons $E_{\sqrt{2}}(K)$.
Toujours d'après l'étude faite à la question précédente, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\sqrt{2}}(K) \iff x + z - \sqrt{2}y = 0 \text{ et } \sqrt{2}z - y = 0$$
$$\iff y = \sqrt{2}z \text{ et } x = -z + \sqrt{2}y = -z + 2z = z.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$E_{-\sqrt{2}}(K) = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\neq 0}\right).$$

En d'autres termes,

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_{\sqrt{2}}(K).}$$

Là encore, on pourra prendre un instant pour vérifier :

$$K\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, concluons sur ce qui vient d'être établi. Les 3 matrices colonnes mises en avant ci-dessus correspondent à 3 vecteurs propres de K associés à des valeurs propres distinctes donc la famille constituée de ces 3 matrices colonnes est libre mais comme cette famille comporte 3 éléments et comme 3 est la dimension de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, on peut dire que cette famille est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres de K.

> Rapport du jury
>
> Les candidats ne répondent pas à la question.
> Il est demandé de donner une base de chaque sous-espace propre. La réponse se limite souvent à un Vect.
> D'ailleurs, la rédaction de cette question 1) b) laisse globalement à désirer. Ce sont des questions très travaillées en classe et les candidats ne se donnent plus la peine de lire la question avec attention, de présenter ce qu'ils calculent et sautent des étapes au moment de conclure. Ce sont au final, des points bêtement perdus...

c) i) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Étudions le système homogène de matrice $J - \lambda I$, c'est-à-dire