Jour n°1

Exercice 1.1

Deux personnes A et B entrent au même instant dans deux cabines téléphoniques. On suppose que les temps de communication, en minutes, de chacune de ces personnes sont des variables aléatoires, indépendantes, suivant une même loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. On note ces variables aléatoires respectivement X et Y.

1) On suppose que le temps moyen d'une communication téléphonique est de deux minutes. Quelle est la valeur de α ?

2) On note T la variable aléatoire égale au temps d'attente avant qu'une des deux cabines se libère. Déterminer la loi de T et préciser son espérance et sa variance.

3) La première personne ayant fini sa conversation attend la seconde pendant une durée notée U. Déterminer la loi de la variable aléatoire U.

On rappelle à toutes fins utiles que si X_1 et X_2 sont indépendantes et admettent pour densité f_1 et f_2 respectivement, alors $X_1 + X_2$ admet pour densité g définie par

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 1.2

Soit n un entier strictement positif et $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ la matrice carrée d'ordre n telle que $a_{i,j} = 1$ si $i + j = n + 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

1) Calculer A^2.

2) Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

3) A est-elle diagonalisable ?

Énoncé

Deux personnes A et B entrent au même instant dans deux cabines téléphoniques. On suppose que les temps de communication, en minutes, de chacune de ces personnes sont des variables aléatoires, indépendantes, suivant une même loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. On note ces variables aléatoires respectivement X et Y.

1) On suppose que le temps moyen d'une communication téléphonique est de deux minutes. Quelle est la valeur de α ?

2) On note T la variable aléatoire égale au temps d'attente avant qu'une des deux cabines se libère. Déterminer la loi de T et préciser son espérance et sa variance.

3) La première personne ayant fini sa conversation attend la seconde pendant une durée notée U. Déterminer la loi de la variable aléatoire U.

On rappelle à toutes fins utiles que si X_1 et X_2 sont indépendantes et admettent pour densité f_1 et f_2 respectivement, alors $X_1 + X_2$ admet pour densité g définie par

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice classique utilisant la formule de convolution, formule qui, comme le stipule le programme, doit être redonnée par l'énoncé.

1) Il suffit ici de traduire en terme mathématique l'expression « temps moyen d'une communication ».

$\hookrightarrow$ Cette question ne pose pas de problème, sauf si l'on a oublié les formules essentielles relatives à la loi exponentielle !

2) Toute la difficulté consiste à exprimer correctement la variable T à partir des variables X et Y.
Une fois cette expression donnée, l'étude de T se fait de façon classique en déterminant sa fonction de répartition.
Notez enfin que l'expression « préciser son espérance et sa variance » sous-entend que l'espérance et la variance peuvent être facilement données, ce qui laisse penser que T suit finalement une loi classique.

$\hookrightarrow$ Tout repose dans une bonne approche de T par rapport aux variables X et Y. Mieux vaut se familiariser avec ce type de situation, très classique !

3) Là encore, tout consiste, au départ, à exprimer correctement U en fonction de X et de Y. On voit assez rapidement que U vaut : $X - Y$ si B finit sa conversation avant A et $Y - X$ si A finit sa conversation avant B. Il faut alors synthétiser ces 2 situations en une seule formule.

C'est à partir de là qu'apparaîtra la somme de 2 variables aléatoires à densité, indépendantes. On pourra alors utiliser le produit de convolution, en veillant à en justifier parfaitement son utilisation.

$\hookrightarrow$ Cette question est difficile car même une fois la relation trouvée entre U, X et Y, les calculs sont délicats.

Corrigé

1) On suppose ici :

$$E(X) = 2 = E(Y).$$

Or, X et Y suivent toutes les deux la loi exponentielle de paramètre α.
Ainsi,

$$E(X) = \frac{1}{\alpha} = E(Y).$$

De là, on tire :

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}.}$$

2) Par définition de T, on a :

$$T = \min(X, Y).$$

Soit F_T la fonction de répartition de T et F la fonction de répartition commune aux deux variables X et Y.
Soit aussi $x \in \mathbf{R}$.
On a :

$$F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - P(T > x) = 1 - P((X > x) \cap (Y > x)).$$

L'indépendance de X et Y conduit à :

$$F_T(x) = 1 - P(X > x)P(Y > x).$$

Mais comme X et Y suivent la même loi, il vient :

$$F_T(x) = 1 - (1 - F(x))^2.$$

Enfin, comme X suit la loi exponentielle de paramètre α, on a :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$F_T(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-2\alpha x} & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mais comme $\alpha = 1/2$, on obtient :

$$F_T(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Bref,

$$\boxed{T \text{ suit la loi exponentielle de paramètre 1.}}$$

Par conséquent,

$$\boxed{E(T) = 1 = V(T).}$$

3) Si A finit sa communication avant B alors $U = Y - X$ et si B finit sa conversation avant A alors $U = X - Y$.
On peut donc écrire :

$$U = |\, X - Y \,|\,.$$

Commençons par étudier la variable $X - Y = Z$.
Comme X et Y sont indépendantes, X et $-Y$ le sont aussi.
De plus, X suit la loi exponentielle de paramètre α. Ainsi, X est une variable à densité dont une densité est donnée par :

$$f_X(t) = \begin{cases} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha t} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, comme Y suit aussi la loi exponentielle de paramètre α, Y est une variable à densité dont une densité est égale à f_X. Ainsi, $-Y$ est une variable à densité dont une densité est donnée par :

$$f_{-Y}(t) = \frac{1}{|\,-1\,|} f_X\left(\frac{t-0}{-1}\right) = f_X(-t) = \begin{cases} \alpha \mathrm{e}^{\alpha t} & \text{si} \quad t \leq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, $Z = X + (-Y)$ est la somme de deux variables à densité, indépendantes. Par conséquent, Z est une variable à densité dont une densité f_Z est donnée par la formule du produit de convolution, à savoir :

$$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

On obtient donc :

$$f_Z(x) = \int_0^{+\infty} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha t} f_{-Y}(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Deux cas sont alors à envisager selon le signe de x.

○ <u>Premier cas : $x \leq 0$.</u>

Dans ce cas,

$$\forall t \geq 0,\ x - t \leq 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \int_0^{+\infty} \alpha^2 \mathrm{e}^{-\alpha t} \mathrm{e}^{\alpha(x-t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \alpha \mathrm{e}^{\alpha x} \int_0^{+\infty} \alpha \mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\alpha}{2} \mathrm{e}^{\alpha x} \int_0^{+\infty} 2\alpha \mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or, en considérant la loi exponentielle de paramètre 2α, on a :

$$1 = \int_0^{+\infty} 2\alpha \mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, il vient :

$$f_Z(x) = \frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{\alpha x} = \frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{-\alpha|\,x\,|}.$$

∘ Deuxième cas : $x > 0$.

Dans ce cas,

$$x - t \leq 0 \iff x \leq t.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \int_x^{+\infty} \alpha^2 \mathrm{e}^{-\alpha t} \mathrm{e}^{\alpha(x-t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \alpha \mathrm{e}^{\alpha x} \int_x^{+\infty} \alpha \mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\alpha}{2} \mathrm{e}^{\alpha x} \int_x^{+\infty} 2\alpha \mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or, en considérant une variable aléatoire S suivant la loi exponentielle de paramètre 2α, on a :

$$\int_x^{+\infty} 2\alpha \mathrm{e}^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t = 1 - F_S(x) = \mathrm{e}^{-2\alpha x}.$$

Ainsi, il vient :

$$f_Z(x) = \frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{-2\alpha x} = \frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{-\alpha x} = \frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{-\alpha|\,x\,|}.$$

En résumé,

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_Z(x) = \frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{-\alpha|\,x\,|}.$$

Déterminons alors la fonction de répartition F_U de $U = |\,Z\,|$.
Soit $x \in \mathbf{R}$. On a :

$$F_U(x) = P(U \leq x) = P(|\,Z\,| \leq x).$$

Si $x < 0$ alors il est clair que :

$$F_U(x) = 0.$$

Si $x \geq 0$ alors on a :

$$F_U(x) = P(-x \leq Z \leq x) = \int_{-x}^{x} f_Z(t)\,\mathrm{d}t.$$

La parité de f_Z conduit alors à :

$$\begin{aligned} F_U(x) &= 2\int_0^x f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \alpha\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \\ &= [-\mathrm{e}^{-\alpha t}]_0^x = 1-\mathrm{e}^{-\alpha x}. \end{aligned}$$

En résumé,

$$F_U(x) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On reconnaît tout simplement ici la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre α.
Bref,

$$\boxed{U \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \alpha.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir des résultats liés à la loi exponentielle. Il faut notamment savoir reconnaître une loi exponentielle à partir de sa fonction de répartition.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on étudie la fonction de répartition d'une fonction d'une variable aléatoire à densité. Il faut notamment se souvenir de la façon dont on étudie la fonction de répartition :
(−) du minimum de 2 variables aléatoires à densité indépendantes ;
(−) de la valeur absolue d'une variable à densité.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on justifie et dont on utilise un produit de convolution.

> Rapport du jury 2008
>
> Les candidats rencontrent beaucoup de difficultés dans l'application de la « formule » de convolution.

> Rapport du jury 2007
>
> L'utilisation de la « formule » de convolution est souvent un exercice périlleux.

♡ Il faut se souvenir d'une densité de $aX+b$ lorsque a et b sont deux réels avec a non nul et lorsque X est une variable à densité.

♡ Il faut se souvenir de l'utilisation de la parité d'une densité.

♡ Il faut se souvenir qu'il peut être particulièrement efficace d'interpréter certaines intégrales de façon probabiliste. Par exemple, si α est un réel strictement positif, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \alpha t\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

correspond à l'espérance d'une variable aléatoire H suivant la loi exponentielle de paramètre α, c'est-à-dire que l'on peut de suite écrire :

$$\int_0^{+\infty} \alpha t \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = E(H) = \frac{1}{\alpha}\cdot$$

♡ Il faut se souvenir qu'il est souvent plus judicieux de travailler avec l'écriture littérale d'un paramètre. En effet, cela évite des erreurs de calcul en cas de remplacement par une valeur fausse.

Formulaire

• Soit α un réel strictement positif. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.
(P_1) X suit la loi exponentielle de paramètre α.
(P_2) Une densité de X est la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{si} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(P_3) La fonction de répartition de X est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{si} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas,

$$E(X) = \frac{1}{\alpha} \text{ et } V(X) = \frac{1}{\alpha^2}\cdot$$

• Si X est une variable à densité de densité f et si $(a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ alors $aX + b$ est une variable à densité dont une densité est donnée par :

$$f_{aX+b}(x) = \frac{1}{|\,a\,|} f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Énoncé

Soit n un entier strictement positif et $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ la matrice carrée d'ordre n telle que $a_{i,j} = 1$ si $i + j = n + 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

1) Calculer A^2.

2) Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

3) A est-elle diagonalisable ?

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice dont l'objectif majeur est la détermination des éléments propres d'une matrice carrée d'ordre n. Il faut de suite voir que l'étude de la diagonalisabilité est immédiate du fait que la matrice est symétrique réelle !

1) Le calcul de A^2 se fait sans difficulté si l'on a bien défini A.

$\hookrightarrow$ Il est essentiel de réussir cette question. Si l'on a quelques difficultés avec n quelconque, on peut commencer par des cas particuliers élémentaires : $n = 2$ et $n = 3$.

2) On pourrait chercher à déterminer les valeurs propres de A de façon classique en étudiant le système homogène de matrice $A - \lambda I$. Mais on peut être un peu plus efficace en exploitant la question précédente.
En effet, grâce à la relation de la question 1), on peut facilement montrer que le spectre de A est inclus dans un ensemble très restreint. Plus précisément, la question 1) a mis en avant un « polynôme annulateur » (terme hors programme) de la matrice A et l'on va alors montrer que le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de ce polynôme.
Ensuite, il s'agit d'étudier l'espace $E_\lambda(A)$ où λ est une valeur propre potentielle. Dans ce cas,

$$\lambda \text{ est bien une valeur propre de } A \text{ si et seulement si } \dim E_\lambda(A) \geq 1.$$

L'étude de ces espaces va demander de la vigilance puisque ces études vont mettre en avant 2 cas selon la parité de n. Ces études de cas sont une réelle source de difficultés.

$\hookrightarrow$ Il faut savoir exploiter efficacement l'égalité de la question 1) : cette égalité permet en effet de situer très rapidement là où se trouvent les valeurs propres. De plus, la technique utilisée est très classique. Il faut ensuite être bien organisé pour réussir à déterminer les espaces propres éventuels : on se perd vite dans les indices.

3) La réponse est immédiate si l'on a repéré certaines spécificités de la matrice.

$\hookrightarrow$ Cette question est absolument immédiate si l'on détecte de suite une caractéristique essentielle de diagonalisabilité. En fait, ce qui rend cette question délicate, c'est son positionnement : la dernière question de l'exercice après une question assez délicate. En conclusion, il ne faut pas se laisser décourager par des questions un peu délicates et il faut toujours aller au bout de l'exercice !