Chapitre 1

Algèbre linéaire

1.1 CCINP

Exercice 1 (CCINP) Soient L_1 et L_2 deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie n, tels que :

$$\forall (u,v) \in L_1 \times L_2, \quad u \circ v + v \circ u = 0.$$

1. Montrer qu'il existe deux projecteurs p_1 et p_2 dans $L_1 \times L_2$ tels que $\mathrm{Id}_E = p_1 + p_2$.
2. Montrer que $n = \mathrm{rg}(p_1) + \mathrm{rg}(p_2)$.
3. Soit $u \in L_1$. Montrer que, si $x \in \mathrm{Im}(p_2)$ alors $u(x) = 0$ et si $x \in \ker(p_2)$ alors $u(x) \in \ker(p_2)$.
4. En déduire que $\dim(L_1) \leqslant (n - \mathrm{rg}(p_2))^2$. Quelle inégalité a-t-on pour $\dim(L_2)$?
5. Justifier que $\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(L_1) + \dim(L_2)$.
6. Montrer que $\mathrm{rg}(p_1)(n - \mathrm{rg}(p_2)) \leqslant 0$ et en déduire que $\mathrm{rg}(p_1) = 0$ ou $\mathrm{rg}(p_1) = n$ puis que $L_1 = \{0\}$ ou $L_2 = \{0\}$.

Solution 1

1. *Puisque* $L_1 \oplus L_2 = \mathcal{L}(E)$, *il existe* $(p_1, p_2) \in L_1 \times L_2$ *tel que* $\mathrm{Id}_E = p_1 + p_2$. *En choisissant* $u = p_1 \in L_1$ *et* $v = \mathrm{Id}_E - p_1 = p_2 \in L_2$ *dans la relation fournie par l'énoncé, on obtient :*

$$p_1 \circ (\mathrm{Id}_E - p_1) + (\mathrm{Id}_E - p_1) \circ p_1 = 0 \Leftrightarrow p_1 - (p_1)^2 + p_1 - (p_1)^2 = 0 \Leftrightarrow (p_1)^2 = p_1$$

donc p_1 *est un projecteur. Il en est de même de* p_1 ($v = p_2 \in L_2, u = \mathrm{Id}_E - p_2 = p_1 \in L_1$).

2. *Montrons que* $\ker(p_1) = \mathrm{Im}(p_2)$. *Soit* $x \in \ker(p_1) \Leftrightarrow p_1(x) = 0$ *alors*

$$x = \mathrm{Id}_E(x) = p_1(x) + p_2(x) = p_2(x) \in \mathrm{Im}(p_2)$$

d'où l'inclusion $\ker(p_1) \subset \mathrm{Im}(p_2)$. *Soit* $x \in \mathrm{Im}(p_2)$ *alors* $p_2(x) = x$ *(car* p_2 *est un projecteur) donc*

$$p_1(x) = (\mathrm{Id}_E - p_1)(x) = x - p_2(x) = 0$$

d'où l'inclusion $\mathrm{Im}(p_2) \subset \ker(p_1)$, *ce qui prouve l'égalité* $\mathrm{Im}(p_2) = \ker(p_1)$. *Or, d'après le théorème du rang, on a l'égalité :*

$$n = \mathrm{rg}(p_1) + \dim(\ker(p_1)) = \mathrm{rg}(p_1) + \dim(\mathrm{Im}(p_2)) = \mathrm{rg}(p_1) + \mathrm{rg}(p_2).$$

3. *Puisque* $u \in L_1$ *et* $p_2 \in L_2$, *on a* $u \circ p_2 + p_2 \circ u = 0$. *Si* $x \in \mathrm{Im}\,(p_2)$ *alors* $p_2(x) = x$. *Or on a :*

$$u(p_2(x)) + p_2(u(x)) = 0 \Leftrightarrow u(x) + p_2(u(x)) = 0 \Rightarrow p_2(u(x)) = -u(x)\,.$$

Si $u(x) \neq 0$ *alors* $u(x)$ *est un vecteur propre de* p_2 *associé à la valeur propre* -1. *Or, on a* $(p_2)^2 = p_2$ *donc le polynôme* $P = X^2 - X$ *annule* p_2 *d'où l'inclusion*

$$\mathrm{Sp}\,(p_2) \subset \{\textit{racines de } P\} = \{0,1\}\,.$$

Par conséquent, on en déduit que $u(x) = 0$.
Si $x \in \ker(p_2)$ *alors* $p_2(x) = 0$. *Or on a :*

$$u(p_2(x)) + p_2(u(x)) = 0 \Leftrightarrow p_2(u(x)) = 0 \Rightarrow u(x) \in \ker(p_2)\,.$$

4. *Il est immédiat que* $u_{|\ker(p_2)}$ *est linéaire et d'après la question précédente, on peut affirmer que :*

$$\forall x \in \ker(p_2)\,,\ u_{|\ker(p_2)}(x) = u(x) \in \ker(p_2)$$

donc $u_{|\ker(p_2)}$ *est bien un endomorphisme de* $\ker(p_2)$. *Considérons alors l'application* Φ *définie sur* $\mathcal{L}(E)$ *par :*

$$\forall u \in \mathcal{L}(E)\,,\ \Phi(u) = u_{|\ker(p_2)} \in \mathcal{L}(\ker(p_2))$$

donc $\Phi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(\ker(p_2))$. *La linéarité de* Φ *est évidente. Montrons que* Φ *est injective. Soit* $u \in \ker(\Phi)$ *alors on a les équivalences suivantes :*

$$\Phi(u) = 0 \Leftrightarrow u_{|\ker(p_2)} = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \ker(p_2)\,,\ u(x) = 0.$$

Puisque $E = \ker(p_2) \oplus \mathrm{Im}\,(p_2)$ *(car* p_2 *est un projecteur), on peut affirmer que, pour tout* $x \in E$, *il existe* $(x_1, x_2) \in \ker(p_2) \times \mathrm{Im}\,(p_2)$ *tel que* $x = x_1 + x_2$. *Comme* $x_2 \in \mathrm{Im}\,(p_2)$ *alors* $u(x_2) = 0$ *(question 3) et comme* $x_1 \in \ker(p_2)$, *on a par hypothèse* $u(x_1) = 0$ *donc*

$$u(x) = u(x_1) + u(x_2) = 0 + 0 = 0$$

quelque soit $x \in E$ *d'où* $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$. *Ainsi,* Φ *est injective donc, d'après le théorème du rang, on a la formule :*

$$\begin{aligned} \dim(L_1) &= \dim(\ker(\Phi)) + \mathrm{rg}\,(\Phi) = \mathrm{rg}\,(\Phi) \underset{(*)}{\leqslant} \dim(\mathcal{L}(\ker(p_2))) = (\dim(\ker(p_2)))^2 \\ &= (n - \mathrm{rg}\,(p_2))^2 \end{aligned}$$

$(*)$ *: Il est immédiat* $\mathrm{Im}\,(\Phi) \subset \mathcal{L}(\ker(p_2))$ *d'où* $\mathrm{rg}\,(\Phi) = \dim(\mathrm{Im}\,(\Phi)) \leqslant \dim(\mathcal{L}(\ker(p_2)))$.
En échangeant les rôles de p_1 *et* p_2, *on obtient* $\dim(L_2) \leqslant (n - \mathrm{rg}\,(p_1))^2 = (\mathrm{rg}\,(p_2))^2$.

5. *Comme* L_1 *et* L_2 *sont supplémentaires dans* $\mathcal{L}(E)$, *la formule de Grassmann fournit l'égalité :*

$$n^2 = \dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(L_1 \oplus L_1) = \dim(L_1) + \dim(L_2)\,.$$

6. *On pose* $r = \mathrm{rg}\,(p_2)$. *Alors, on a :*

$$n^2 = \dim(L_1) + \dim(L_2) \leqslant (n-r)^2 + r^2 \Leftrightarrow n^2 \leqslant n^2 - 2nr + r^2 + r^2 \Leftrightarrow 2r(r-n) \geqslant 0.$$

Or $r - n \leqslant 0$ *et* $r \geqslant 0$ *donc* $r(r-n) \leqslant 0$, *ce qui montre que* $r(r-n) = 0$. *Si* $r = 0$ *alors on obtient :*

$$0 \leqslant \dim(L_2) \leqslant r^2 = 0 \Rightarrow \dim(L_2) = 0 \Rightarrow L_2 = \{0\}\,.$$

Si $r - n = 0$ *alors on obtient :*

$$0 \leqslant \dim(L_1) \leqslant (n-r)^2 = 0 \Rightarrow \dim(L_1) = 0 \Rightarrow L_1 = \{0\}\,,$$

ce qui permet de conclure.

Commentaires 1 *Il s'agit d'un exercice très difficile et très long pour CCINP. Pour l'anecdote, il fut donné originellement à ... Polytechnique ! Seules les questions 1 à 3 sont accessibles aux candidats standards de CCINP, s'ils parviennent à utiliser l'hypothèse d'anti-commutation des éléments de L_1 et L_2. Pour les autres questions, l'aide de l'interrogateur sera indispensable.*

Exercice 2 (CCINP) Soit $E = \mathbb{R}_n(X)$. On considère la suite de polynômes définie par :

$$N_0 = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ N_k(X) = \frac{X(X-1)...(X-k+1)}{k!}.$$

On considêre l'endomorphisme de E défini par $u(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Déterminer le noyau de u.
2. Montrer que $(N_0, \ldots, N_n)$ est une base de E.
3. Calculer $u(N_k)$.
4. Montrer que u est nilpotent. Quel est son indice de nilpotence ?
5. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Montrer qu'il existe un unique $Q \in E$ tel que $u(Q) = P$ et $Q(0) = 0$.

Solution 2

1. *Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $u(P) = 0 \Leftrightarrow P(X+1) = P(X)$. Une récurrence immédiate montre que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ P(x+n) = P(x) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = P(0).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n) = P(0) \in \mathbb{R}$. Or, si P n'est pas constant alors $\lim\limits_{+\infty} P = \pm\infty$ donc P est nécessairement constant. Réciproquement, si P est constant, il est immédiat que $P(X+1) = P(X)$ donc $u(P) = 0$. Par conséquent, on vient de démontrer l'égalité ensembliste suivante :

$$\ker(u) = \{C,\ C \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1).$$

2. *La famille $(N_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est échelonnée en degré donc elle est libre. Elle est constituée de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.*
3. *Si $k = 0$, on a $u(N_0) = 1 - 1 = 0$. Si $k \in \{1, ..., n\}$, on a :*

$$\begin{aligned} u(N_k) &= N_k(X+1) - N_k(X) \\ &= \frac{(X+1)X(X-1)\cdots(X+2-k)}{k!} - \frac{X(X-1)...(X-k+2)(X-k+1)}{k!} \\ &= [(X+1)-(X-k+1)]\frac{X(X-1)...(X-k+2)}{k!} \\ &= k \times \frac{X(X-1)...(X-k+2)}{k!} = \frac{X(X-1)...(X-k+2)}{(k-1)!} = N_{k-1}. \end{aligned}$$

4. *En convenant que $N_r = 0$ si $r < 0$, d'après la question précédente, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, on a :*

$$\begin{aligned} u^{n+1}(N_k) &= u^n(u(N_k)) = u^n(N_{k-1}) = u^{n-1}(u(N_{k-1})) \\ &= u^{n-1}(N_{k-2}) = \cdots = u^0\left(N_{k-(n+1)}\right) = N_{k-(n+1)} = 0 \end{aligned}$$

(car $k-(n+1)<0$). Ainsi, u^{n+1} est nul sur la base $(N_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ donc u^{n+1} est nul sur $\mathbb{R}_n[X]$, ce qui prouve que u est nilpotent. Comme $u^n(N_n)=N_0\neq 0$, on en déduit que $u^n\neq 0$ et comme $u^{n+1}=0$, on peut affirmer que $n+1$ est l'indice de nilpotence de u.

5. *Déterminons $\operatorname{Im}(u)$. Comme $(N_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on a :*

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(u) &= \operatorname{Vect}(u(N_k),\, k\in\{0,\dots,n\}) = \operatorname{Vect}(N_{k-1},\, k\in\{0,\dots,n\})\\ &= \operatorname{Vect}(N_j,\, j\in\{0,\dots,n-1\})\ \ (car\ N_{-1}=0) = \mathbb{R}_{n-1}[X].\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe $P_1\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P=u(P_1)$. En posant $Q=P_1-P_1(0)$, on a :

$$\begin{aligned}Q(0) &= P_1(0)-P_1(0)=0,\ u(Q)=P_1(X+1)-P_1(0)-(P_1(X)-P_1(0))\\ &= P_1(X+1)-P_1(X)=P,\end{aligned}$$

ce qui prouve l'existence de Q. Soit $R\in\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $u(R)=P$ et $R(0)=0$. On considère le polynôme $S=Q-R\in\mathbb{R}_n[X]$ et

$$u(S)=u(Q)-u(R)=P-P=0$$

donc $S\in\ker(u)=\operatorname{Vect}(1)$ c'est-à-dire qu'il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $S=C$. Comme

$$C=S(0)=Q(0)-R(0)=0-0=0,$$

on en déduit que $S=0\Leftrightarrow Q=R$, ce qui démontre l'unicité de Q.

Commentaires 2 *Exercice standard de CCINP qui teste les connaissances fondamentales attendues en algèbre linéaire de première année. En contre-partie, l'interrogateur sera beaucoup plus exigeant sur la rigueur et la clarté du candidat face à cet exercice. N'hésitez pas à passer certaines questions si vous bloquez dessus car les questions sont largement indépendantes. Cela vous permettra d'optimiser votre phase de préparation sur table.*

Exercice 3 (CCINP) Soit $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe au plus un polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$(E):\forall k\in\{0,\dots,n\},\ P^{(k)}(1)=1.$$

2. (a) Supposons qu'il existe et notons-le P_0. Déterminer l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant (E), en fonction de P_0.
   (b) Montrer que P_0 existe et écrire sa décomposition dans une base adaptée de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. (a) Soient $(a_0,\dots,a_n)$ et $(b_0,\dots,b_n)$ des réels. Montrer qu'il existe un unique $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall k\in\{0,\dots,n\},\ P^{(k)}(a_k)=b_k$.
   (b) Si $m>n$, que dire des polynômes de $\mathbb{R}_m[X]$ vérifiant la condition précédente ?

Solution 3

1. *Soient P et Q appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant (E) alors :*

$$\forall k \in \{0, ..., n\}, \ (P-Q)^{(k)}(1) = P^{(k)}(1) - Q^{(k)}(1) = 1 - 1 = 0.$$

Ainsi, 1 est une racine d'ordre (au moins) $n+1$ de $P-Q$ qui est un polynôme de degré au plus n donc $P-Q=0 \Leftrightarrow P=Q$, ce qui démontre l'unicité.

2. (a) *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ alors, d'après le raisonnement effectué à la question précédente, P vérifiant (E) si et seulement si 1 est une racine d'ordre (au moins) $n+1$ de $P - P_0$. Ceci est équivalent à dire que le polynôme $(X-1)^{n+1}$ divise $P-P_0$ ce qui est équivalent à l'existence d'un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :*

$$P - P_0 = (X-1)^{n+1} Q \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X], \ P = P_0 + (X-1)^{n+1} Q$$

(b) *Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant (E). D'après la formule de Taylor (pour les polynômes) en 1, on a :*

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(X-1)^k.$$

Réciproquement, on pose $P_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(X-1)^k}{k!}$ alors, pour tout entier $j \in \{0, ..., n\}$, on a :

$$\begin{aligned} P_0^{(j)}(X) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\overbrace{\left((X-1)^k\right)^{(j)}}^{=0 \ si \ j>k}}{k!} \\ &= \sum_{k=j}^{n} \frac{\left((X-1)^k\right)^{(j)}}{k!} \sum_{k=j}^{n} \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{k!}(X-1)^{k-j}. \end{aligned}$$

Pour tout j vérifiant $k-j>0$, $(X-1)^{k-j}$ s'annule en 1 et si $k-j=0 \Leftrightarrow j=k$, le polynôme $(X-1)^{k-1}$ est constant et vaut 1 donc on obtient les égalités :

$$\forall j \in \{0, ..., n\}, \ P_0^{(j)}(1) = \frac{j(j-1)\cdots(1)}{j!}1 = 1$$

c'est-à-dire P_0 vérifie (E).

3. (a) *On considère l'application*

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & \left(P(a_0), P'(a_1), P''(a_2), ..., P^{(n)}(a_n)\right) = \left(P^{(k)}(a_k)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n} \end{array} \right. .$$

Si nous démontrons que f est un isomorphisme alors, pour tout $(b_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :

$$f(P) = (b_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \Leftrightarrow \forall k \in \{0, ..., n\}, \ P^{(k)}(a_k) = b_k.$$

On remarque que f est une application linéaire car, pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P+\mu Q) &= \left((\lambda P+\mu Q)^{(k)}(a_k)\right)_{0\leqslant k\leqslant n} = \left(\lambda P^{(k)}(a_k)+\mu Q^{(k)}(a_k)\right)_{0\leqslant k\leqslant n} \\ &= \lambda\left(P^{(k)}(a_k)\right)_{0\leqslant k\leqslant n} + \mu\left(Q^{(k)}(a_k)\right)_{0\leqslant k\leqslant n} = \lambda f(P)+\mu f(Q). \end{aligned}$$

Déterminons son noyau. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors on a les équivalences suivantes :

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow f(P) = 0_{\mathbb{R}^{n+1}} \Leftrightarrow \forall k \in \{0,...,n\},\ P^{(k)}(a_k) = 0.$$

Supposons que P soit non nul alors il possède un degré N i.e. il existe $p_N \neq 0$ tel que $P = p_N X^N + Q$ avec $\deg(Q) < N$. Ainsi, on a $P^{(N)}(X) = N!p_N \neq 0$ ce qui contredit le fait que $P^{(N)}(a_N) = 0$ donc $P = 0$. Par conséquent, $\ker(f) = \left\{0_{\mathbb{R}_n[X]}\right\}$ donc f est injective. Comme $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1 = \dim\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$, on peut affirmer que f est un isomorphisme, ce qui permet de conclure.

(b) *On considère l'application*

$$g : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}_m[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & \left(P^{(k)}(a_k)\right)_{0\leqslant k\leqslant n} \end{array} \right. .$$

qui est linéaire. Cette application est surjective puisque, pour tout $(b_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$, il existe $P \in \mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}_m[X]$ tel que $(b_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \underset{q2.a}{=} f(P) = g(P)$.

Soit $(b_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$, notons P_n l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $f(P) = (b_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. Alors, pour tout polynôme P, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall k &\in \{0,...,n\},\ P^{(k)}(a_k) = b_k \Leftrightarrow f(P) = f(P_n) \underset{f \text{ linéaire}}{\Leftrightarrow} f(P-P_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow P - P_n \in \ker(f) \Leftrightarrow \exists Q \in \ker(f),\ P = P_n + Q \end{aligned}$$

Nous n'irons pas plus loin dans la description (trop complexe pour un oral CCINP, éventuellement l'interrogateur donnera quelques pistes s'il reste du temps).

Commentaires 3 *Exercice de difficulté progressive bien adapté aux candidats de CCINP. Il est tout à fait possible de répondre simultanément aux questions 1 et 2 en utilisant directement la formule de Taylor pour les polynômes. Un candidat de niveau standard pour CCINP doit pouvoir répondre à ces deux questions lors de sa phase de préparation. La question 3 est d'un niveau de difficulté supérieur pour distinguer les meilleurs candidats. Il est possible de répondre à la question 3.a. en écrivant le système linéaire vérifié par les coefficients de ce polynôme P. Comme il est triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls, il possède une et une seule solution. On peut également écrire la matrice de $f : P \mapsto \left(P^{(k)}(a_k)\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$. Cette matrice est carrée, triangulaire et à coefficients diagonaux tous non nuls donc elle est inversible, ce qui justifie que f est un isomorphisme.*

1.2 Mines-Telecom

Exercice 4 (Mines-Telecom)

1. Donner le théorème du rang. Soient f et g des endomorphismes de E (un espace vectoriel de dimension n).
2. On suppose que $g \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) \leqslant n$.
3. On suppose que $f + g$ est bijectif, montrer que $\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) \geqslant n$.

Solution 4

1. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F alors :*
$$\dim(E) = \mathrm{rg}\,(f) + \dim(\ker(f)).$$
2. *On a :*
$$\begin{aligned} \forall x &\in E,\ g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in E,\ f(x) \in \ker(g) \\ &\Rightarrow \mathrm{Im}\,(f) \subset \ker(g) \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}\,(f)) \leqslant \dim(\ker(f)) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}\,(f) \leqslant n - \mathrm{rg}\,(g) \Leftrightarrow \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) \leqslant n. \end{aligned}$$
3. *Puisque $f + g$ est bijectif, pour tout $x \in E$, il existe $x' \in E$ tel que :*
$$\begin{aligned} x &= (f+g)(x') = \underbrace{f(x')}_{\in \mathrm{Im}(f)} + \underbrace{g(x')}_{\in \mathrm{Im}(g)} \in \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g) \\ &\Rightarrow E \subset \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g). \end{aligned}$$
D'autre part, $\mathrm{Im}\,(f)$ *et* $\mathrm{Im}\,(g)$ *sont deux sous-espaces vectoriels de E donc*
$$\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g) \subset E \Rightarrow \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g) = E.$$
D'après la formule de Grassmann, on a :
$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) &= \dim(\mathrm{Im}\,(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(g)) \\ &= \dim(\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) \\ &\geqslant \dim(\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)) = \dim(E) = n. \end{aligned}$$

Commentaires 4 *Exercice standard de MPSI. La première question vise uniquement à donner une aide implicite au candidat .... donc il faudra l'utiliser lors de l'exercice. La deuxième question est très classique et élémentaire donc elle ne doit pas poser de problème au candidat. Si cela n'est pas le cas, il est temps de revoir en profondeur les fondamentaux de l'algèbre linéaire. La troisième question, sans être difficile, permet de distinguer les candidats ayant une bonne maitrise des outils de base de l'algèbre linéaire de première année.*

Exercice 5 (Mines-Telecom) Soient E et F deux espaces vectoriels, u une application linéaire de E dans F, et v une application linéaire de F dans E telles que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $\ker(u \circ v) = \ker(v)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\,(u \circ v) = \mathrm{Im}\,(u)$.
3. Montrer que $\ker(v) \oplus \mathrm{Im}\,(u) = F$.

Solution 5

1. *Soit* $x \in \ker(u \circ v)$ *alors :*

$$(u \circ v)(x) = 0_E \Leftrightarrow u(v(x)) = 0_E \Rightarrow v(u(v(x))) = v(0_E)$$
$$\Leftrightarrow (v \circ u)(v(x)) = 0_E \Leftrightarrow \mathrm{Id}_E(v(x)) = 0_E \Leftrightarrow v(x) = 0$$

donc $x \in \ker(v)$. *Si* $x \in \ker(v)$ *alors :*

$$v(x) = 0_E \Rightarrow (u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(0_E) = 0_E$$

donc $x \in \ker(u \circ v)$, *ce qui prouve l'égalité* $\ker(u \circ v) = \ker(v)$.

2. *Soit* $x \in \mathrm{Im}(u \circ v)$, *il existe* $y \in E$ *tel que :*

$$x = (u \circ v)(y) = u(v(y)) \in \mathrm{Im}(u).$$

Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$, *il existe* $y \in E$ *tel que :*

$$x = u(y) = (u \circ \mathrm{Id}_E)(y) = (u \circ v \circ u)(y) = u((v \circ u)(y)) \in \mathrm{Im}(u)$$

d'où l'égalité $\mathrm{Im}(u \circ v) = \mathrm{Im}(u)$.

3. *Soit* $x \in \ker(v) \cap \mathrm{Im}(u)$, *on a :*

$$\begin{cases} v(x) = 0_E \\ \exists y \in E,\, x = u(y) \end{cases} \Rightarrow v(u(y)) = v(x) = 0_E \Leftrightarrow (v \circ u)(y) = 0_E$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{Id}_E(y) = 0_E \Leftrightarrow y = 0_E \Rightarrow x = u(y) = u(0_E) = 0_E$$

donc $\ker(v) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$.
Si E *est de dimension finie, on a :*

$$\dim(\ker(v)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\ker(u \circ v)) + \dim(\mathrm{Im}(u \circ v)) = \dim(E)$$

(d'après le théorème du rang) donc $E = \ker(v) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
Néanmoins, l'énoncé ne supposant pas que E *soit de dimension finie, il nous faut démontrer l'égalité ensembliste :*

$$\ker(v) + \mathrm{Im}(u) = E.$$

Comme $\ker(v)$ *et* $\mathrm{Im}(u)$ *sont des sous-espaces vectoriels de* E, *il est immédiat que* $\ker(v) + \mathrm{Im}(u) \subset E$. *Pour l'autre inclusion, on procède classiquement par analyse-synthèse.*
Phase d'analyse. *Soit* $x \in E$. *Supposons qu'il existe* $y_v \in \ker(v)$ *et* $z_u \in \mathrm{Im}(u)$ *tel que* $x = y_v + z_u$. *Il existe* $t \in E$ *tel que* $z_u = u(t)$ *donc :*

$$\begin{aligned} x &= y_v + u(t) \Rightarrow v(x) = \underbrace{v(y_v)}_{=0_E} + v(u(t)) = (v \circ u)(t) = \mathrm{Id}_E(t) = t \\ &\Rightarrow z_u = u(t) = u(v(x)) \text{ et } y_v = x - z_u = x - u(v(x)). \end{aligned}$$

Phase de synthèse. *Soit* $x \in E$, *on pose :*

$$\begin{aligned} z &= u(v(x)) \in \mathrm{Im}(u) \text{ et } y = x - u(v(x)) \Rightarrow v(y) = v(x) - \underbrace{(v \circ u)}_{=\mathrm{Id}_E}(v(x)) \\ &= v(x) - v(x) = 0 \Rightarrow y \in \ker(v) \text{ et } y + z = x \end{aligned}$$

donc $E \subset \ker(v) + \mathrm{Im}(u)$.
Par conséquent, on vient de prouver que $\ker(v) \oplus \mathrm{Im}(u) = F$.