Chapitre 1

Logique - Théorie des ensembles

1 Notation

Traditionnellement, les objets mathématiques (nombres, fonctions...) sont notés avec une lettre de l'alphabet pouvant être minuscule, majuscule, capitale etc...
Lorsqu'on se donne une liste de n objets on utilise un indice : $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
On peut aussi utiliser un indice supérieur, placé entre parenthèses, pour ne pas le confondre avec la puissance : $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$.
Lorsqu'on considère un tableau de nombres, on a recourt au double-indiçage : x_{ij} désigne l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.
Pour varier les notations, on utilise aussi l'aplhabet grec, dont nous rappelons ci-dessous les minuscules et majuscules. Il est vivement recommander de bien le connaitre (sous peine de faire sourire son examinateur à l'oral).

Minuscule	Majuscule	Nom
α	A	Alpha
β	B	Bêta
γ	Γ	Gamma
δ	Δ	Delta
ϵ	E	Epsilon
ζ	Z	Dzéta
η	H	Êta
θ	Θ	Thêta
ι	I	Iota
κ	K	Kappa
λ	Λ	Lambda
μ	M	Mu

Minuscule	Majuscule	Nom
ν	N	Nu
ξ	Ξ	Xi
o	O	Omicron
π	Π	Pi
ρ	P	Rhô
σ	Σ	Sigma
τ	T	Tau
υ	Υ	Upsilon
φ	Φ	Phi
χ	X	Chi
ψ	Ψ	Psi
ω	Ω	Omega

On utilisera aussi les abréviations suivantes :

- cqfd = ce qu'il fallait démontrer :
- ie = id est = c'est-à-dire ;
- p/r = par rapport à ;
- resp. = respectivement.

Ce cours de mathématiques est organisé selon une série de **définitions**, signalées par un cadre aux bords arrondis et par une série de **théorèmes** signalés par un cadre aux bords en angle droit.
Le tout est illustré par des exemples et des exercices, ces derniers étant signalés par un crayon à papier. Les corrections suivent en italiques.
Certains chapitres comportent des explications sur la manière de rédiger ; celles-ci sont elles aussi en italique.
Le mot **théorème** est réservé à des résultats mathématiques jugés importants. Dans le cas d'un théorème « facile », on utilise le mot **proposition**. Parfois, on reformule certains théorèmes dans des cas simples, directement utilisables en pratiques : on parle alors de **corollaire**. Enfin certaines démonstrations plus ardues que les autres nécessiteront de démontrer des petites propositions intermédiaires appelées **lemmes**.

2 Logique

Un **prédicat** (ou **assertion**) est un énoncé mathématique qui est soit **juste**, soit **faux**. On dit qu'un prédicat ne peut prendre que **deux valeurs logiques** : V ou F (ie Vrai ou Faux).

Par convention, lorsqu'on énonce un prédicat, on sous-entend toujours qu'il est vrai.
***Exemple* :** « La fonction f est croissante sur l'intervalle I. »

Soient A et B deux prédicats. On définit les opérations suivantes.

• **Négation :** La négation de A est notée $non(A)$ ou $\overline{A}$. Elle est définie par la **table de vérité** suivante :

A	$non(A)$
V	F
F	V

On a bien évidemment $non(non(A)) = \overline{\overline{A}} = A$ (l'égalité signifie que les deux prédicats ont même table de vérité).
• **« Et » :** Le prédicat $A\ et\ B$ est défini par :

A	B	$A\,et\,B$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

On a bien évidemment $A\ et\ B = B\ et\ A$.
• **« Ou » :** Le prédicat $A\,ou\,B$ est défini par :

A	B	$A\, ou\, B$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

On a bien évidemment $A\ ou\ B = B\ ou\ A$.
Remarquons qu'il s'agit d'un « ou » **inclusif**, c'est-à-dire que les deux prédicats peuvent être vrais en même temps (contrairement au « ou » exclusif).

Proposition 1 – Lois de Morgan

Les prédicats suivants ont même table de vérité.
— « $non(A\, et\, B)$ » et « $non(A)\, ou\, non(B)$ »
— « $non(A\, ou\, B)$ » et « $non(A)\, et\, non(B)$ »

- **Implication :** Le prédicat $A \Longrightarrow B$ est défini par :

A	B	$A \Longrightarrow B$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

En pratique, on ne considère que les première et troisième lignes de cette table de vérité, c'est-à-dire que l'on traduit le prédicat $A \Longrightarrow B$ par : **si** A est vrai **alors** B est vrai, ou encore pour que A soit vrai **il faut que** B soit vrai, pour que B soit vrai **il suffit** que A soit vrai. On dit que A est une **condition suffisante** pour B et que B est une **condition nécessaire** pour A.

✎ ***Exemple.*** On pose A = « Le chien court sous la pluie » et B = « Le chien est mouillé ». Il est clair que $A \Longrightarrow B$. Par contre on n'a pas $B \Longrightarrow A$ (le chien est peut-être tombé dans la piscine !). Dans ce cas, on dit que la réciproque de l'implication $A \Longrightarrow B$ est fausse. On peut donc dire que « pour que le chien court sous la pluie, il faut qu'il soit mouillé », « pour que le chien soit mouillé, il suffit qu'il court sous la pluie ».
Rédaction. *Pour montrer que le prédicat $A \Longrightarrow B$ est vrai, on procède de la façon suivante. On suppose que la prédicat A est vrai ; on doit alors montrer que le prédicat B est vrai.*

Pour montrer qu'une implication est vraie on utilise parfois le **raisonnement par contraposée**. Pour prouver que $A \Longrightarrow B$ est vrai, on montre que $non(B) \Longrightarrow non(A)$ est vrai, c'est-à-dire : **si** B est faux **alors** A est faux. En effet, on peut vérifier que ces deux prédicats ont la même table de vérité.
Par convention, on demande toujours de « montrer que $A \Longrightarrow B$ » à la place de « montrer que le prédicat $A \Longrightarrow B$ est vrai ».
✎ ***Exemple.*** Soit n un entier naturel. Montrer que : n^2 est pair $\Longrightarrow$ n est pair.
On raisonne par contraposée : montrons que n impair $\Longrightarrow$ n^2 impair.

Pour cela, supposons que n est impair, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel p tel que $n = 2p+1$. On a : $n^2 = 4p^2+4p+1 = 2q+1$, où on a posé $q = 2p^2+2p$. D'après les règles de calculs sur les entiers naturels, on sait que q est un entier naturel. Donc on peut conclure que n^2 est impair.
L'implication est donc démontrée.
Pour faire une preuve directe, on aurait du supposer que n^2 est pair, pour démontrer ensuite que n est pair. Dans ce sens là, c'est nettement plus difficile...

- **Équivalence :** Le prédicat $A \Longleftrightarrow B$ est défini par :

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

En pratique, on ne considère que la première ligne de cette table de vérité, c'est-à-dire que l'on traduit la proposition $A \Longleftrightarrow B$ par : A est vrai **si et seulement si = (ssi)** B est vrai, ou encore pour que A soit vrai **il faut et il suffit que** B soit vrai. On dit que A (resp. B) est une **condition nécessaire et suffisante** pour B (resp. pour A).

Pour montrer qu'une équivalence est vraie on raisonne généralement par **double-implication** : on montre que $A \Longrightarrow B$ est vrai puis que $B \Longrightarrow A$ l'est aussi. En effet, on peut vérifier que les prédicats $A \Longleftrightarrow B$ et « $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$ » ont la même table de vérité.

Rédaction. *Pour montrer que $A \Longleftrightarrow B$ est vrai, on procède donc par double-implication.*
$\boxed{\Rightarrow}$ *On suppose que la prédicat A est vrai ; on doit alors montrer que B est vrai. On en déduit que $A \Longrightarrow B$ est vrai.*
$\boxed{\Leftarrow}$ *On suppose que la prédicat B est vrai ; on doit alors montrer que A est vrai. On en déduit que $B \Longrightarrow A$ est vrai.*
On peut alors conclure que $A \Longleftrightarrow B$ est vrai.

- **Raisonnement par l'absurde** : Pour montrer qu'un prédicat A est vraie, on peut choisir de raisonner par l'absurde : on suppose que A est faux, et on essaye d'aboutir à une contradiction évidente du type $2 < 1$ ou $0 < x < 0$ etc...

✎ ***Exemple.*** Soit $x > 0$. Montrons que $2x > x$.
Par l'absurde supposons que $2x \leq x$. On a alors $2x - x = x \leq 0$, ce qui contredit l'hypothèse $x > 0$. Par l'absurde, on a donc montré que $2x > x$.

- **Raisonnement par récurrence :** Soit $P(n)$ un prédicat qui dépend d'un entier $n \in \mathbb{N}$. On veut démontrer qu'il existe un entier n_0 fixé tel que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On dispose pour cela de différents résultats.

Théorème 2 – Récurrence simple

On suppose que :
(i) Initialisation : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vrai ;
(ii) Hérédité : pour $n \geq n_0$ fixé quelconque, $P(n)$ vrai $\Longrightarrow P(n+1)$ vrai.
Alors on sait que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$.

✎ ***Exemple.*** Pour $n \geq 1$, montrons que $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
On note $P(n)$ la propriété « $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ».
Comme $P(n+1)$ ne dépend que de $P(n)$ on utilise une démonstration par récurrence simple.
Initialisation : la propriété $P(1)$ est vraie car dans ce cas $1+2+3+\cdots+n = 1$ et $\dfrac{n(n+1)}{2} = 1$.
Hérédité : soit $n \geq 1$ fixé quelconque tel que $P(n)$ est vraie.
On a alors : $1+2+3+\cdots+n+(n+1) \overset{P(n)}{=} \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Donc la propriété $P(n+1)$ est vraie.
D'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 3 – Récurrence à deux pas

On suppose que :
(i) Initialisation à deux pas : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vrais ;
(ii) Hérédité à deux pas : pour $n \geq n_0$ fixé quelconque,
$P(n)$ et $P(n+1)$ vrais $\Longrightarrow P(n+2)$ vrai.
Alors on sait que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$.

✎ ***Exemple.*** On pose $F_0 = F_1 = 1$ et pour $n \geq 0$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Montrons que pour $n \geq 0$, $F_n \geq 0$.
On note $P(n)$ la propriété « $F_n \geq 0$ ».
Comme $P(n+2)$ dépend de $P(n)$ et $P(n+1)$ on utilise une démonstration par récurrence à deux pas.
Initialisation à deux pas : les propriétés $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies car $F_0 = F_1 = 1$.
Hérédité à deux pas : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies.
On a donc $F_n \geq 0$ et $F_{n+1} \geq 0$.
D'où $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \geq 0$.
Donc la propriété $P(n+2)$ est vraie.
D'après le principe de récurrence à deux pas, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 4 – Récurrence forte

On suppose que :
(i) Initialisation : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vrai ;
(ii) Hérédité forte :
pour $n \geq n_0$ fixé quelconque, $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n)$ vrais $\Longrightarrow P(n+1)$ vrai.
Alors on sait que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$.

✎ ***Exemple.*** On pose $u_1 = 3$ et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{2}{n}\left(u_1 + u_2 + \cdots + u_n\right)$. Montrons que pour $n \geq 1$, $u_n = 3n$.
On note $P(n)$ la propriété « $u_n = 3n$ ».
Comme $P(n+1)$ dépend de $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ on utilise une démonstration par récurrence forte.
Initialisation : la propriété $P(1)$ est vraie car $u_1 = 3$.
Hérédité forte : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(0), P(1), \ldots, P(n)$ sont vraies.
On a donc : $u_{n+1} = \frac{2}{n}\left(u_1+u_2+\cdots+u_n\right) = \frac{2}{n}\left(3+6+\cdots+3n\right) = \frac{6}{n}\left(1+2+\cdots+n\right) = \frac{6}{n}\frac{n(n+1)}{2} = 3(n+1)$.
Donc la propriété $P(n+1)$ est vraie.
D'après le principe de récurrence forte, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3 Ensembles

3.1 Définitions

Définition 5 – Ensembles

Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments. On note $x \in E$ lorsque x est élément de E, et $x \notin E$ dans le cas contraire.

✎ ***Exemple.*** Un ensemble peut donc être défini en énumérant la liste de ses éléments (entre accolades) :

$\{a\}$ = ensemble formé d'un unique élément a = **singleton**
E = ensemble des couleurs d'un jeu de 32 cartes = {coeur, carreau, trèfle, pique}
$\mathbb{N}$ = ensemble des entiers naturels = $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (infinité d'éléments)

Définition 6 – Quantificateurs

Soit $P(x)$ un prédicat dépendant de x élément de E.

1. Lorsque $P(x)$ est vrai **pour tous** les éléments x de E, on le note :
$$\forall x \in E, \quad P(x)$$
Le symbole $\forall$ est appelé quantificateur « quel que soit ».
2. Lorsque $P(x)$ est vrai pour **au moins un** élément x de E, on le note :
$$\exists x \in E; P(x)$$
Le symbole $\exists$ est appelé quantificateur « il existe ».
3. Lorsque $P(x)$ est vrai pour **un unique** élément x de E, on le note :
$$\exists! x \in E; P(x)$$
Le symbole $\exists!$ est appelé quantificateur « il existe un unique ».

Rédaction.

1. *Pour montrer que « $\forall x \in E$, $P(x)$ », on procède de la manière suivante : on se donne $x \in E$ fixé quelconque et le but est alors de montrer que $P(x)$ est vrai pour cet x.*
2. *Pour montrer que « $\exists x \in E$; $P(x)$ », on procède de la manière suivante : on doit trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vrai, par exemple en résolvant une équation d'inconnue x et en prouvant que cette équation a au moins une solution.*
3. *Pour montrer que « $\exists! x \in E / P(x)$ », on procède de la manière suivante : on doit trouver un unique $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vrai, par exemple en résolvant une équation d'inconnue x et en prouvant que cette équation a une unique solution.*

Il faut connaître la négation de ces quantificateurs.

Proposition 7 – Négation des quantificateurs

L'égalité signifiant que les prédicats ont même table de vérité :

1. $non\big(\forall x \in E, P(x)\big) = \exists x \in E; non\big(P(x)\big)$.
2. $non\big(\exists x \in E; P(x)\big) = \forall x \in E, non\big(P(x)\big)$.

Nous allons maintenant voir comment comparer deux ensembles.

Définition 8 – Inclusion

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F et on le note $E \subset F$ ou $E \subseteq F$, lorsque tout élément de E est aussi élément de F, i.e. lorsque :

$$\forall x \in E, \quad x \in F$$

ou encore :

$$x \in E \Longrightarrow x \in F$$

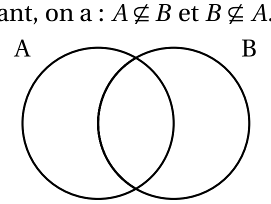
On dit aussi que E est un sous-ensemble de F, ou que E est une partie de F.

Dans le cas contraire, on note $E \not\subset F$ et on a : $\exists x \in E$; $x \notin F$.

⚠ ATTENTION : dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on peut toujours comparer deux nombres x et y : on a $x \leq y$ et $x \geq y$. On dit que la relation d'ordre $\leq$ est **totale**. Mais ce n'est pas le cas pour les ensembles : si A et B sont deux ensemble quelconques, on peut avoir $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}$, si $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, alors $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$.

✎ ***Exemple.*** Sur l'exemple suivant, on a : $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$.



Rédaction. *Pour montrer que $E \subseteq F$ on se donne $x \in E$ fixé quelconque, et on démontre que $x \in F$.*

Proposition 9 – Propriétés élémentaires de la relation d'inclusion

Si E, F, G sont trois ensembles :
(i) on a $E \subseteq E$;
(ii) si $E \subseteq F$ et $F \subseteq G$ alors $E \subseteq G$.

Définition 10 – Egalité de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles.
On dit que $E = F$ lorsque $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$, ie lorsque : $x \in E \Longleftrightarrow x \in F$.

Si $E \subseteq F$ mais $F \not\subseteq E$ alors on dit que E est strictement inclus dans F, et on le note $E \subsetneq F$.
Rédaction. *Pour montrer que $E = F$ on procède donc par double-inclusion.*
$\boxed{\subseteq}$ *On se donne $x \in E$ fixé quelconque ; on doit alors montrer que $x \in F$. On en déduit que $E \subseteq F$.*
$\boxed{\supseteq}$ *On se donne $x \in F$ fixé quelconque ; on doit alors montrer que $x \in E$. On en déduit que $F \subseteq E$.*
On peut alors conclure que $E = F$.

On définit un ensemble particulier qui ne possède pas d'élément.

Définition 11 – Ensemble vide

On appelle ensemble vide, noté $\emptyset$, l'ensemble qui ne posséde aucun élément. Il est inclus dans tout autre ensemble. Il ne possède qu'un sous-ensemble : lui-même.

Très souvent on définit un sous-ensemble en imposant que ses éléments vérifient une certaine propriété.

Définition 12 – Sous-ensemble défini par une propriété

Soient E un ensemble et $P(x)$ une propriété dépendant de x élément de E. L'ensemble des éléments de E vérifiant la propriété $P(x)$ est noté :

$$\{x \in E \,/\, P(x)\} \text{ ou encore } \{x \in E\,;\, P(x)\}$$

C'est un sous-ensemble de E.

✎ ***Exemple.*** $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 \geq 1\}$ est une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 13 – Ensemble des parties

Si E est un ensemble, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
On a donc pour F un ensemble quelconque :

$$F \subseteq E \Longleftrightarrow F \in \mathscr{P}(E)$$