1

LES STRATÉGIES DE BASE

On débute notre préparation par explorer un certain nombre de stratégies générales qui s'appliquent dans des contextes variés. Le but de ce chapitre est de montrer à quel point elles sont simples à comprendre, et cependant parfois si difficiles à utiliser.

1.1. Le principe des tiroirs

Ce principe est parfois appelé principe de Dirichlet[1] puisque c'est ce mathématicien qui fut le premier à réaliser qu'il pouvait servir pour montrer des résultats non triviaux.

Dans sa version la plus simple, ce principe peut être énoncé comme suit : « si $n+1$ balles sont placées dans n tiroirs, au moins un tiroir contiendra 2 balles ou plus ». Plus généralement :

1.1.1. Principe des tiroirs. *Si n balles sont placées dans k tiroirs, au moins un tiroir contiendra $\lceil n/k \rceil$ balles ou plus.*

♦ **Exemples.**

1. On se donne n entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Prouver qu'il existe un sous-ensemble de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ dont la somme des éléments est divisible par n.

Considérons les sommes suivantes : $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2, \ldots$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Si l'un des S_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, est divisible par n, c'est fini. Sinon, considérons les restes de la division euclidienne des S_i par n. On dispose ainsi de n restes que l'on place dans les $n-1$ « tiroirs », les restes possibles modulo n. D'après le principe des tiroirs, il existe deux sommes S_i et S_j $(i < j)$ qui ont le même reste modulo n. Il est alors évident que $S_j - S_i = a_{i+1} + \cdots + a_j$ est divisible par n.

2. Un grand maître joue au moins une partie d'échecs par jour pour garder la

1. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), mathématicien allemand.

forme, mais pas plus de 10 par semaine pour ne pas se fatiguer. Prouver que s'il joue ainsi suffisamment longtemps, il y aura une période continue de jours pendant laquelle il aura joué exactement 21 parties.

Soit a_i le nombre de parties disputées jusqu'au jour i inclus. On a alors

$$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqslant 10 \times \left\lceil \frac{k}{7} \right\rceil, \quad k = 1, 2, \ldots$$

On en déduit que

$$22 \leqslant a_1 + 21 < a_2 + 21 < \cdots < a_k + 21 \leqslant 10 \times \left\lceil \frac{k}{7} \right\rceil + 21, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Pour k suffisamment grand, l'inégalité $2k > 21 + 10 \times \lceil k/7 \rceil$ devient vraie. Il s'ensuit qu'il existe deux indices i et j tels que $a_j = a_i + 21$. Le grand maître aura alors disputé 21 rencontres pendant la période s'étalant entre le jour $i + 1$ et le jour j inclus.

EXERCICES

1. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ des entiers. Prouver qu'il existe des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{10}$ non tous nuls et appartenant à l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$ tels que $\sum_{i=1}^{10} \alpha_i a_i$ soit divisible par 1001.

(Proposé à l'OIM-1988)

---

2. Pour tout ensemble de dix naturels écrits à l'aide de deux chiffres (en système décimal), il existe au moins deux sous-ensembles disjoints dont les sommes des éléments sont égales.

(Olympiades internationales-1972/1)

---

3. On considère 13 nombres réels deux à deux distincts. Prouver que, parmi ces nombres, il existe deux réels a et b vérifiant :

$$0 < \frac{a - b}{1 + ab} \leqslant 2 - \sqrt{3}.$$

---

4. On colorie tous les points du plan en utilisant les deux couleurs rouge et vert. Démontrer qu'il existe un triangle équilatéral dont le côté mesure 1 ou $\sqrt{3}$ et les trois sommets sont de la même couleur.

(Olympiades chinoises-1986)

---

5. S est un ensemble convexe du plan. Les points de S sont coloriés à l'aide de p couleurs, et on suppose qu'il existe dans S trois points non alignés. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, il existe une infinité de polygones de n côtés, isométriques et dont les sommets sont de la même couleur.

(Olympiades roumaines-1995)

---

6. On fait une partition de l'ensemble des points du plan orienté en un nombre fini de parties représentées par autant de couleurs. On fixe deux points distincts O et A de ce plan. À tout point X du plan, distinct de O, on fait correspondre :

a) la mesure en radians $\alpha(X)$ de l'angle $(\widehat{OA, OX})$ prise dans $[0, 2\pi[$;

b) le cercle $\mathcal{C}(X)$ de centre O, de rayon $OX + \alpha(X)/OX$.

Démontrer qu'il existe un point Y du plan avec $\alpha(Y) > 0$, tel qu'il existe un point de $\mathcal{C}(Y)$ de la même couleur que Y.

(Olympiades internationales-1984/3)

---

7. Soit ABC un triangle équilatéral. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points des segments fermés $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$. Est-ce que, pour toute partition de E en deux sous-ensembles disjoints, il existe au moins un triangle rectangle dont les trois sommets appartiennent au même sous-ensemble ?

(Olympiades internationales-1983/4)

---

8. Soit n un entier $\geqslant 2$. Prouver que, dans une réunion de n personnes, il existe toujours deux personnes telles que, parmi les $n-2$ autres participants, il y ait au moins $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ participants qui connaissent les deux personnes à la fois ou leur sont complètement étrangères.

(Olympiades des États-Unis-1985)

1.2. La récurrence

Dans l'axiomatique de Peano[2], le principe suivant est un axiome de construction de l'ensemble $\mathbb{N}$:

> **1.2.1. Le principe de récurrence.** *Soit m un entier naturel et P_m, $P_{m+1}, \ldots$ une suite de propositions. Si*
>
> *a) P_m est vraie, et si*
>
> *b) pour tout entier naturel $k \geqslant m$, $P_k \Longrightarrow P_{k+1}$ est vrai,*
>
> *alors toutes les propositions sont vraies.*

♦ **Remarques.**

1. Dans la preuve par récurrence, l'étape a) est appelée la base de la récurrence

2. Guissepe Peano (1858-1932), mathématicien italien.

et l'étape b) est appelée l'étape inductive.

2. Il ne faut surtout pas oublier la base de la récurrence : en effet, la condition b) est vraie pour toute suite de propositions fausses.

3. Il peut arriver que dans une preuve par récurrence, on ait besoin pour montrer P_{k+1} non seulement de P_k mais aussi des P_i pour $m \leqslant i \leqslant k$. En appliquant le principe de récurrence à la suite de propositions $(Q_n)_{n \geqslant m}$ définie par : $Q_n \Longleftrightarrow (\forall k \in \{m, \ldots, n\}, P_k)$, on justifie le principe de récurrence suivant :

1.2.2. La récurrence forte. *Soit m un entier naturel et P_m, $P_{m+1}, \ldots$ une suite de propositions. Si*
a) P_m est vraie, et si
b) pour tout entier naturel $k \geqslant m$, (P_m et P_{m+1} et ... et P_k) $\Longrightarrow P_{k+1}$ est vraie,
alors toutes les propositions sont vraies.

♦ **Exemples.**

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

L'astuce est de prouver par récurrence une inégalité un peu plus forte. Soit P_n la propriété : « $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$ ».

Il est alors clair que P_1 est vraie. Si P_n est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} < 2 - \frac{1}{n+1},$$

d'où P_{n+1}.

2. Soit n un entier naturel, et soit $\mathcal{E}$ un ensemble constitué de $2n+1$ entiers naturels non nuls (non nécessairement distincts). On suppose que $\mathcal{E}$ vérifie la propriété (P) : « en enlevant à $\mathcal{E}$ un élément quelconque, il est toujours possible de partitionner les éléments restants en deux parties de n éléments, la somme des éléments constituant chaque partie étant la même ». Prouver que tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont égaux.

On raisonne par récurrence à n fixé sur la valeur du plus grand élément de $\mathcal{E}$. Si le plus grand élément de $\mathcal{E}$ est égal à 1, alors tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont égaux à 1 et on a le résultat souhaité.

Supposons donc le résultat vrai pour tout ensemble $\mathcal{E}$ à $2n+1$ éléments (non nécessairement distincts) vérifiant la propriété (P), et dont le plus grand élément est $\leqslant m$. Considérons alors un ensemble $\mathcal{E}$ dont le plus grand élément est égal à $m+1$, et soient x_1, $x_2, \ldots, x_{2n+1}$ ses éléments (on accepte toujours que les x_i ne soient pas tous distincts). Si $\mathcal{E}$ vérifie la propriété (P), alors tous les x_i, $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$, sont de la même parité : en effet, pour tout i, $j \in \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$, il existe des entiers naturels S_i et S_j tels que $x_i + 2S_i = x_j + 2S_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n+1}$.

Si tous les x_i, $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$, sont pairs, alors l'ensemble $\mathcal{E}_1 = \{x_1/2, x_2/2, \ldots, x_{2n+1}/2\}$ vérifie la propriété (P). Comme le plus grand élément de $\mathcal{E}_1$ est $\leqslant m$, il s'ensuit que $x_1/2 = x_2/2 = \cdots = x_{2n+1}/2$, i.e., $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2n+1}$.

Si tous les x_i, $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$, sont impairs, alors l'ensemble $\mathcal{E}_2 = \{(x_1 + 1)/2, (x_2+1)/2, \ldots, (x_{2n+1}+1)/2\}$ vérifie la propriété (P), et comme le plus grand élément de $\mathcal{E}_2$ est $\leqslant m$, on a encore $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2n+1}$, ce qui achève la récurrence.

3. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_m$ des entiers naturels non nuls. On suppose que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_m < mn$. Prouver qu'il est possible de supprimer certains termes (mais pas tous !) de part et d'autre de l'égalité $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$ tout en conservant une égalité.

On raisonne par récurrence sur $m + n$. Comme $m \leqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_n < mn$, on a $n > 1$, et de même $m > 1$. Pour $m + n = 4$, on a donc $m = n = 2$ et les seuls cas possibles sont $1 + 1 = 1 + 1$ et $1 + 2 = 1 + 2$ (à l'ordre près), de sorte que le résultat est immédiat.

Supposons donc le résultat vrai pour un certain $k = m + n \geqslant 4$. Considérons

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_m < mn,$$

où $m + n = k + 1$. On peut supposer, sans nuire à la généralité, que x_1 est le plus grand des x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, et que y_1 est le plus grand des y_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. On peut aussi supposer $x_1 > y_1$ car si $x_1 = y_1$, le problème est résolu. On a alors

$$(x_1 - y_1) + x_2 + \cdots + x_n = y_2 + \cdots + y_m,$$

avec $y_2 + \cdots + y_m < mn - \dfrac{mn}{m} = n(m-1)$. Comme $n + (m-1) = k$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour conclure.

EXERCICES

9. Soit n un entier strictement positif. Prouver que, pour tout entier strictement positif $a \leqslant n!$, il existe des entiers positifs $d_1, d_2, \ldots, d_k$, $k \leqslant n$, deux à deux distincts et divisant chacun $n!$, tels que : $a = d_1 + d_2 + \cdots + d_k$.

---

10. Soit n un entier de la forme 2^k, $k \geqslant 1$. Prouver que, dans tout ensemble de $2n - 1$ entiers strictement positifs, on peut trouver un sous-ensemble de n entiers dont la somme est divisible par n.

(Olympiades allemandes-1981)

---

11. On considère n points d'un même plan ($n \geqslant 5$). Démontrer qu'il est possible de relier ces points par des flèches de telle sorte que de chaque point on peut arriver à un autre point en suivant une ou deux flèches.

---

12. Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{1989}$ des vecteurs dans le plan tels que $||\vec{v}_r|| \leqslant 1$ pour $1 \leqslant r \leqslant 1989$. Montrer qu'il est possible d'affecter à chaque vecteur $\vec{v}_r$ un nombre $\varepsilon_r = \pm 1$ de telle sorte que :

$$\left|\left|\sum_{r=1}^{1989} \varepsilon_r \vec{v}_r\right|\right| \leqslant \sqrt{2}.$$

(Proposé à l'OIM-1989)

---

13. On considère un ensemble de $2n$ points dans l'espace euclidien, $n > 1$, et on suppose construits $n^2 + 1$ segments entre ces points. Prouver que la configuration obtenue contient au moins un triangle.

---

14. Les sommets d'un polygone convexe ayant $2n + 1$ côtés sont coloriés de telle sorte que deux sommets consécutifs n'aient pas la même couleur. Prouver qu'il est possible de diviser ce polygone en triangles à l'aide de diagonales dont les extrémités sont de couleurs différentes et qui ne se recoupent pas entre elles.

(Olympiades hongroises-1978)

1.3. La descente infinie

Supposant le principe de récurrence acquis, il est facile de démontrer que « toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément ». On dit que $\mathbb{N}$ est bien ordonné. Une conséquence de ce principe équivalent au principe de récurrence est la méthode de descente infinie découverte par Fermat[3].

1.3.1. La descente infinie. *Soit une suite de propositions $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$ Si pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k est fausse, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que P_m soit fausse et $m < k$, alors toutes les propositions $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$ sont vraies.*

♦ **Preuve.** On démontre d'abord que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément : en effet, si S est une partie de $\mathbb{N}$ n'ayant pas de plus petit élément, considérons la suite de propositions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où la proposition P_n est « $\forall k \leqslant n$, $k \notin S$ ». P_0 est alors vraie car autrement 0 serait le plus petit élément de S. De plus, si P_m est vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}$, alors P_{m+1} est vraie : en effet, si P_{m+1} était fausse, alors $m + 1 \in S$ serait le plus petit élément de S puisque P_m est vraie.

Pour démontrer la validité de la méthode de descente infinie, on raisonne par l'absurde : l'ensemble des entiers k tels que P_k est fausse serait alors une partie non vide de $\mathbb{N}$ qui n'admet pas de plus petit élément.

$\square$

3. Pierre de Fermat (1601-1665), mathématicien français.

♦ **Exemples.**

1. La suite des carrés parfaits contient-elle une progression arithmétique infinie ?

Si $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une progression arithmétique infinie, alors

$$a_{m+1}^2 - a_m^2 = a_m^2 - a_{m-1}^2, \quad m = 2, 3, 4, \ldots$$

Comme $a_{m+1} + a_m > a_m + a_{m-1}$, on doit avoir $a_{m+1} - a_m < a_m - a_{m-1}$ pour $m \geqslant 2$, ce qui s'écrit encore :

$$a_2 - a_1 > a_3 - a_2 > a_4 - a_3 > \cdots$$

On a ainsi une suite strictement décroissante d'entiers positifs, ce qui est impossible.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation diophantienne :

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3.$$

Montrons que $(0, 0, 0)$ est la seule solution à l'équation proposée. Si (x, y, z) est une solution non nulle, alors x est pair. Si on pose $x = 2w$ où $w \in \mathbb{Z}$, alors

$$(2w)^3 + 2y^3 = 4z^3,$$

c'est-à-dire

$$(-y)^3 + 2z^3 = 4w^3,$$

ce qui implique que $(-y, z, x/2)$ est aussi solution. D'une façon analogue, on trouve que $(-z, x/2, -y/2)$ est solution, puis que $(-x/2, -y/2, -z/2)$ est aussi solution, et ainsi de suite on arrivera à une solution contenant un entier impair, ce qui est impossible.

EXERCICES

15. Prouver qu'il n'existe pas de quadruplets (x, y, z, t) d'entiers strictement positifs tels que :

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2).$$

---

16. À chaque sommet d'un pentagone régulier, on associe un entier relatif de telle sorte que la somme de ces cinq nombres soit strictement positive.

Si, à trois sommets consécutifs, correspondent respectivement les nombres x, y, z avec $y < 0$, alors l'opération suivante est permise : « remplacer le triplet (x, y, z) par $(x + y, -y, y + z)$ ».

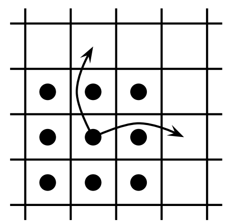
Cette opération est répétée tant qu'au moins un des cinq nombres est strictement négatif. Déterminer si ce processus prend nécessairement fin après un nombre fini d'opérations.

(Olympiades internationales-1986/3)

---

17. Il y a n^2 pièces occupant un carré de côté n sur un échiquier infini. Il est possible de déplacer une pièce par dessus une case occupée vers une case vide ; la pièce par dessus de laquelle le mouvement est effectué est alors immédiatement écartée de l'échiquier.

Pour quelles valeurs de n peut-on se retrouver avec une seule pièce sur l'échiquier ?



(Olympiades internationales-1993/3)

1.4. Maximums et minimums

L'un des réflexes qu'il faut avoir en présence de problèmes d'existence dans un ensemble fini est de considérer des objets de l'ensemble qui minimisent ou maximisent les valeurs prises par une certaine fonction. Il s'agit donc d'une méthode permettant de construire une solution ou de prouver qu'il n'existe aucune solution au problème. Les exemples et exercices qui suivent montreront à quel point il est facile de dérouler la démonstration une fois réussi le choix de la fonction.

♦ **Exemples.**

1. On se donne un ensemble fini $\mathcal{E}$ de points dans le plan. On suppose que pour toute paire $\{A, B\}$ de points dans $\mathcal{E}$, il existe un point $C \neq A, B$ dans $\mathcal{E}$ tel que les points A, B et C soient alignés. Prouver que tous les points de $\mathcal{E}$ sont alignés.

Si les points de $\mathcal{E}$ n'étaient pas tous alignés, l'ensemble des couples (A, Δ), où Δ est une droite passant par deux points de $\mathcal{E}$ et A est un point de $\mathcal{E}$ n'appartenant pas à Δ, serait non vide.

Considérons alors un couple (A, Δ) qui minimise la distance du point A à la droite Δ, et soit P le pied de la perpendiculaire issue du point A à la droite Δ. Il existe au moins trois points B, C et D de l'ensemble $\mathcal{E}$ sur la droite Δ.