Thème 1 - Vocabulaire ensembliste

[S1.1] Réunion et intersection de parties

Soient A, B deux parties d'un ensemble E.
On appelle réunion de A et B l'ensemble noté $A \cup B$, défini par :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

On appelle intersection de A et B l'ensemble noté $A \cap B$, défini par :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

[S1.2] Propriétés de la réunion et de l'intersection

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E.

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ et $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

[S1.3] Différence et complémentaire de parties

Soient A, B deux parties d'un ensemble E.
On appelle A privé de B l'ensemble noté $A \setminus B$, défini par :

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble noté $\complement_E(A)$, défini par :

$$\complement_E(A) = E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

[S1.4] Propriétés de la différence et du complémentaire

Soient A, B deux parties d'un ensemble E.

- $\complement_E(\complement_E(A)) = A$.
- $\complement_E(A \cup B) = \complement_E(A) \cap \complement_E(B)$ et $\complement_E(A \cap B) = \complement_E(A) \cup \complement_E(B)$.

  ✓ Ces deux dernières égalités sont appelées les lois de Morgan.

- $A \subset B \iff \complement_E(B) \subset \complement_E(A)$.
- $A \setminus B = A \cap \complement_E(B)$.

[S1.5] Application injective

Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est injective, si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \big(f(x) = f(y) \implies x = y\big).$$

[S1.6] Application surjective

Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est surjective, si :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y \, .$$

[S1.7] Application bijective

Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est bijective, si f est injective et surjective.
Dans ce cas, il existe une unique application notée $f^{-1} : F \longrightarrow E$ appelée application réciproque de f, qui vérifie :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \, .$$

✓ On fera attention à la notation f^{-1}, dans ce cas elle désigne l'application réciproque de f. Dans d'autre cas, elle désigne l'image réciproque d'un ensemble.

Thème 2 - Calculs algébriques

[S2.1] Définition de la somme et du produit d'une famille finie

Soient I un ensemble fini non vide et pour tout $i \in I, a_i \in \mathbb{C}$ (on dit que $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres indexée sur I), alors on note :

- $\sum_{i\in I} a_i$ la somme des a_i pour l'indice i parcourant I ;
- $\prod_{i\in I} a_i$ le produit des a_i pour l'indice i parcourant I.

✓ En pratique, l'ensemble I est souvent, pour $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leqslant n$ l'ensemble des entiers compris entre m et n , que l'on notera $[\![m\,, n]\!]$.

Dans ce cas, on notera pour simplifier $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i$.

On procède de même pour le produit.

✓ Si $I = \varnothing$ alors par convention, on aura $\sum_{i\in I} a_i = 0$ et $\prod_{i\in I} a_i = 1$.

En particulier, pour $m, n \in \mathbb{Z}$, $m > n$, $\sum_{i=m}^{n} a_i = 0$ et $\prod_{i=m}^{n} a_i = 1$.

[S2.2] Quelques sommes à connaître

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

✓ Cette dernière somme est appelée : somme géométrique.

[S2.3] Factorisation d'une différence de puissances

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$, on a :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} .$$

[S2.4] Définition d'une somme double

Soit $\left(z_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de nombres complexes, alors :

- $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} z_{ij} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} z_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} z_{ij}$;
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} z_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} z_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} z_{ij}$.

[S2.5] Définition de la factorielle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La factorielle de n est définie par :

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)\times n\,.$$

Par convention, $0! = 1$.

[S2.6] Définition des coefficients binomiaux

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{Z}$, on appelle coefficient binomial ou k parmi n, noté $\binom{n}{k}$, le nombre :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0\leqslant k\leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

✓ Ce nombre est toujours un entier naturel.

[S2.7] Règles de calculs avec les coefficients binomiaux

- Pour $n\in\mathbb{N}$: $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
- **Symétrie :** pour $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{Z}$: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- **Formule de Pascal :** pour $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{Z}$: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

[S2.8] Formule du binôme

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $a,b\in\mathbb{C}$, alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}\,.$$

[S2.9] Définition d'un système linéaire d'équations

Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$, un système linéaire de n équations à p inconnues est un système (S) de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right.$$

où pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $a_{ij} \in \mathbb{C}, b_i \in \mathbb{C}$.

Thème 3 - Nombres complexes et trigonométrie

[S3.1] Définition du module et d'un argument d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$, et $z = a + \mathrm{i}b$ sa forme algébrique, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Le module de z est le nombre réel positif, défini par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si de plus z est non nul, un argument de z est un réel θ tel que :

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \text{ et } \sin\theta = \frac{b}{|z|}.$$

Dans ce cas on note $\theta = \operatorname{Arg} z$.

[S3.2] Propriétés du module d'un nombre complexe

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

- $|z| = 0 \iff z = 0$.
- $|z|^2 = z\overline{z}$, où $\overline{z}$ est le conjugué de z.

  ✓ On rappelle que, si $z = a + \mathrm{i}b$ alors $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.

- $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ (Inégalité triangulaire).
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 + z_2|$ (Inégalité triangulaire inverse).
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, et dans le cas où $z_2 \neq 0$: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

[S3.3] Définition de la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
La forme trigonométrique de z est :

$$z = |z|\big(\cos(\operatorname{Arg} z) + \mathrm{i}\sin(\operatorname{Arg} z)\big) = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg} z}.$$

[S3.4] Formules d'Euler

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

[S3.5] Formule de Moivre

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall\theta \in \mathbb{R}, \quad (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

[S3.6] Règles de calcul avec l'exponentielle complexe

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$.

- $\left|e^{i\theta}\right| = 1$, $\overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, $\quad \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

[S3.7] Définition et forme des racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit que $z \in \mathbb{C}$ est une racine n-ième de l'unité si $z^n = 1$.
Soit $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité, alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_n &= \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\} \\ &= \left\{ \omega^k \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\} \text{ en notant } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}.\end{aligned}$$

✓ Pour $n = 3$, le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est noté j, à ne pas confondre avec cette notation en physique, qui désigne le nombre i. .

[S3.8] Formules de trigonométrie exigibles

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

- $$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a.\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 a.\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\Big) \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big) \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big).\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\ \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.\end{aligned}$$

Thème 4 - Inégalités, fonctions usuelles de la variable réelle à valeurs réelles

[S4.1] Définition de la valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$.
On appelle valeur absolue de x, le réel noté $|x|$ défini par :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$

[S4.2] Propriétés de la valeur absolue

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

- $|x| \geqslant 0$, $|-x| = |x|$, $(x \leqslant |x|$ et $-x \leqslant |x|)$.
- $|x| = 0 \iff x = 0$.
- $|xy| = |x||y|$ et dans le cas où $x \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$ et $\left|\dfrac{y}{x}\right| = \dfrac{|y|}{|x|}$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$.
- $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ appelé inégalité triangulaire.

[S4.3] Parties majorées, minorées, bornées

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que E est majorée, si :
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, x \leqslant M.$$

Dans ce cas, on dit que M est un majorant de E.

- On dit que E est minorée, si :
$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E, m \leqslant x.$$

Dans ce cas, on dit que m est un minorant de E.

- On dit que E est bornée, si E est à la fois minorée et majorée, autrement dit, si :
$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, m \leqslant x \leqslant M,$$
ce qui en terme de valeur absolue, est équivalent à :
$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in E, |x| \leqslant k.$$