Chapitre 1

Absence d'opportunités d'arbitrage, probabilité risque neutre et évaluation en temps discret

Nous introduisons, à travers la présentation d'un marché financier en temps discret, les notions essentielles abordées dans ce livre :

- ⋆ la formulation d'un modèle mathématique pour décrire des stratégies financières dynamiques,
- ⋆ la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage (A.O.A.) et le principe d'évaluation par réplication en A.O.A.,
- ⋆ la modélisation de la rentabilité par une marche aléatoire,
- ⋆ l'outil fondamental qu'est la probabilité risque neutre.

1.1 Modèle de marché financier

On considère, sur un horizon de temps $T > 0$, un marché financier formé par $(d+1)$ actifs, $S^0, \cdots S^d$; il convient de noter que S^j signifie aussi bien l'actif j que son processus de prix. On suppose que les agents peuvent intervenir sur ce marché aux dates discrètes $t_k \in \mathcal{T} := \{t_0, \cdots t_N\}$ où $t_0 < \cdots < t_N = T$.

L'actif S^0 est un actif sans risque. Son processus de prix, noté toujours $S^0 := \{S^0_t,\ t \in \mathcal{T}\}$ évolue selon la dynamique déterministe

$$S^0_{t_{k+1}} = S^0_{t_k} e^{r(t_{k+1}-t_k)}. \tag{1.1}$$

Sauf mention explicite du contraire nous prendrons $t_0 = 0$ et $S^0_{t_0} = 1$. La constante $r \geq 0$ est le taux d'intérêt sans risque, supposé constant et connu. Pour modéliser l'incertitude concernant les prix des actifs $S^1, \cdots, S^d$, on introduit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On désigne par $S^i_{t_k}$ la variable aléatoire qui correspond au prix de l'actif i à la date t_k. On note $S = \{S_t,\ t \in \mathcal{T}\}$ le processus $(d+1)$-dimensionnel

$$S \ := \ \left\{S_t = \left(S^0_t, S^1_t, \ldots, S^d_t\right)^\star,\ t \in \mathcal{T}\right\}.$$

Ici, pour tout vecteur ou matrice X, nous notons $X^\star$ son transposé. En particulier S_t est donc un vecteur colonne.

On désigne par processus de prix actualisés le processus $\tilde{S}$ défini par

$$\tilde{S} \ := \ \left\{\tilde{S}_t = \left(1, S^1_t/S^0_t, \ldots, S^d_t/S^0_t\right)^\star,\ t \in \mathcal{T}\right\}.$$

Notons que $\tilde{S}^i$ représente le prix de l'actif risqué S^i si S^0 est pris comme unité de compte. On dit également que $\tilde{S}^i$ est le prix de l'actif S^i lorsque S^0 est pris comme *numéraire*.
Dans ce chapitre, on note $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t,\ t \in \mathcal{T}\}$ la filtration engendrée par S :

$$\mathcal{F}_{t_k} = \sigma\left(S_{t_i}, t_i \leq t_k\right) \qquad \forall t_k \in \mathcal{T}\ .$$

Hypothèse 1.1 (Marché sans frictions) Les actifs de ce marché financier sont parfaitement divisibles et ils ne sont pas soumis à des coûts de transaction.

Pour éviter des problèmes purement techniques, nous travaillerons sous l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1.2 *Le processus S est borné.*

1.1.1 Stratégie financière

Un agent disposant d'un capital initial V_{t_0} l'investit sur le marché financier en l'allouant entre les différents actifs. À chacune des dates t_k il a la possibilité de changer l'allocation de sa richesse entre ces actifs. Ainsi, une stratégie financière peut être décrite par un processus stochastique

$$\theta := \left\{\theta_{t_k} = \left(\theta^0_{t_k}, \dots, \theta^d_{t_k}\right)^\star,\ t_k \in \mathcal{T} \setminus \{t_0\}\right\}.$$

Ici $\theta^i_{t_k} \in \mathbb{R}$ représente le nombre d'unités de S^i détenues entre les dates t_{k-1} et t_k. Noter que $\theta^i_{t_k}$ peut être négatif : il s'agit alors d'une vente à découvert.

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccc} & & & & \text{réallocation} & & & & \\ \cdots & \downarrow & \begin{pmatrix} \theta^0_{t_k} \\ \vdots \\ \theta^d_{t_k} \end{pmatrix} & & \downarrow & \begin{pmatrix} \theta^0_{t_{k+1}} \\ \vdots \\ \theta^d_{t_{k+1}} \end{pmatrix} & \downarrow & \cdots \\ & t_{k-1} & \theta \text{ inchangé} & & t_k & \theta \text{ inchangé} & t_{k+1} & \end{array}}$$

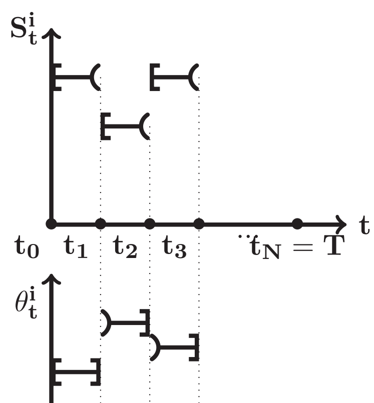

Figure 1.1 – Illustration d'un changement d'allocation au sein de la stratégie θ (cf. l'intuition 1.1.1). On voit que les prix S_t sont continus à droite et les quantités θ_t continues à gauche.

On note V_{t_k} la valeur à la date t_k de ce portefeuille et $\tilde{V}_{t_k}$ sa valeur actualisée c'est-à-dire sa valeur exprimée dans le numéraire S^0. On a alors

$$V_{t_k} = \sum_{i=0}^{d} \theta^i_{t_k} S^i_{t_k} =: \langle \theta_{t_k}, S_{t_k} \rangle \quad \text{et} \quad \tilde{V}_{t_k} = \sum_{i=0}^{d} \theta^i_{t_k} \tilde{S}^i_{t_k} =: \langle \theta_{t_k}, \tilde{S}_{t_k} \rangle.$$

Introduisons $\Delta\tilde{S}$ le processus $d+1$-dimensionnel défini par

$$\Delta\tilde{S}_{t_k} = \left(\Delta\tilde{S}^0_{t_k}, \ldots, \Delta\tilde{S^d_{t_k}}\right)^\star := \left(0, \tilde{S}^1_{t_k} - \tilde{S}^1_{t_{k-1}}, \ldots, \tilde{S}^d_{t_k} - \tilde{S}^d_{t_{k-1}}\right)^\star.$$

La décision prise par l'investisseur lors de la ré-allocation à la date t_{k-1} au prix $S_{t_{k-1}}$ dépend de l'information dont il dispose entre t_0 et t_{k-1}. Il est donc naturel de considérer que la variable aléatoire θ_{t_k} est $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-mesurable.

Définition 1.1 *Soit $\theta = \{\theta_{t_k}, 1 \leq k \leq N\}$ un processus aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$. Il est dit prévisible si, pour tout $k = 1, \cdots, N$, la variable aléatoire θ_{t_k} est $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-mesurable.*

Intuition 1.1.1 *Pour comprendre la notation θ_{t_k} il faut constater qu'il y a une ambiguïté possible concernant sa définition : nous pouvons noter θ_{t_k} la valeur AVANT (en notation intuitive $\theta_{t_k} = \theta_{t_k^-}$) ou APRÈS (en notation intuitive $\theta_{t_k} = \theta_{t_k^+}$) ré-allocation au prix S_{t_k}.* **Nous considérons que θ_{t_k} est la distribution d'actifs résultant de la ré-allocation au prix $S_{t_{k-1}}$ et AVANT une éventuelle ré-allocation au prix S_{t_k}.** *Voici pourquoi : les prix sont imprévisibles, c'est-à-dire que, comme ils changent en t_k, leurs valeurs ne sont pas de simples « continuations » de leurs valeurs en $t_k - \epsilon$. Pour cette raison nous pouvons les considérer comme continus à droite ayant une limite à gauche (trajectoire dite « càdlàg »). Par conséquent θ « subira » ce changement sans pouvoir intervenir : la quantité $\theta_{t_{k-1}^+}$ après la ré-allocation au prix $S_{t_{k-1}}$ subira, sans possibilité d'intervention, le prix S_{t_k} Par conséquent $\theta_{t_k^-} = \theta_{t_{k-1}^+}$ voit les prix S_{t_k} et cette quantité est notée $\theta_{t_k} := \theta_{t_k^-} = \theta_{t_{k-1}^+}$.*

1.1.2 Processus de gains

Si θ est un processus prévisible alors nous pouvons aussi considérer le processus de *gains* $\left(\theta \bullet \Delta\tilde{S}\right)$ c'est-à-dire le processus

$$\left(\theta \bullet \Delta\tilde{S}\right)_{t_0} \; = \; 0 \quad \text{et} \quad \left(\theta \bullet \Delta\tilde{S}\right)_{t_k} \; = \; \sum_{m=1}^{k} \langle \theta_{t_m}, \Delta\tilde{S}_{t_m} \rangle \quad \text{pour } k \geq 1 \; .$$

Il est facile de voir que ce processus compte la somme des gains réalisés par la stratégie θ du fait de son choix d'allocation, gains exclusivement dus aux évolutions (favorables ou pas) des prix des actifs S_t.

1.1.3 Stratégie autofinancée

Définition 1.2 (Stratégie autofinancée) *On dit que la stratégie θ est autofinancée ou encore qu'elle vérifie la condition d'autofinancement si pour tout $k = 1, \cdots, N$ on a*

$$\tilde{V}_{t_k} \;\; = \;\; \tilde{V}_{t_0} + \left(\theta \bullet \Delta\tilde{S}\right)_{t_k} . \tag{1.2}$$

Intuition 1.1.2 *Cette définition implique que toute variation de la valeur du portefeuille entre deux dates successives est totalement due à la variation des prix des actifs, c'est-à-dire qu'il n'y a ni ajout ni retrait d'argent du portefeuille entre t_0 et t_N.*

Dans notre modèle en temps discret, la condition d'autofinancement de la stratégie θ se traduit par l'équation :

$$\tilde{V}_{t_k} \;\; = \;\; \tilde{V}_{t_{k-1}} + \sum_{i=1}^{d} \theta^i_{t_k} \left(\tilde{S}^i_{t_k} - \tilde{S}^i_{t_{k-1}}\right) \; = \; \tilde{V}_{t_{k-1}} + \langle \theta_{t_k}, \Delta\tilde{S}_{t_k} \rangle \tag{1.3}$$

Ainsi, on remarque que l'expression de la richesse actualisée d'une stratégie autofinancée est complètement déterminée par V_{t_0} et θ.

Remarque 1.1 *La condition d'autofinancement est équivalente à*

$$\langle \theta_{t_{k-1}}, \tilde{S}_{t_{k-1}} \rangle = \langle \theta_{t_k}, \tilde{S}_{t_{k-1}} \rangle, \ \forall k = 2, ...N. \tag{1.4}$$

(Voir l'exercice 1.1 page 20.)

1.1.4 Portefeuilles admissibles

On appelle *ensemble des portefeuilles admissibles* ou encore *ensemble des stratégies admissibles* l'ensemble, noté $\mathcal{A}$, des processus prévisibles et autofinancés θ tels que le processus θ est borné. Ainsi

$$\mathcal{A} = \left\{ \theta : \text{prévisible, autofinancé}, \exists C^\theta > 0 \text{ t.q. } |\theta_{t_k}| \leq C^\theta \ \forall t_k \in \mathcal{T} \setminus \{t_0\} \right\}.$$

Soient $v \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathcal{A}$. On note $V^{v,\theta}$ le processus de richesse autofinancé associé au capital initial v et à la stratégie admissible θ et $\tilde{V}^{v,\theta}$ le processus actualisé correspondant, c'est-à-dire exprimé dans le numéraire S^0. Alors

$$\tilde{V}^{v,\theta}_{t_k} \; = \; v/S^0_{t_0} + \left(\theta \bullet \Delta\tilde{S} \right)_{t_k} \quad \text{et} \quad V^{v,\theta}_{t_k} \; = \; v\, e^{r(t_k - t_0)} + S^0_{t_k} \left(\theta \bullet \Delta\tilde{S} \right)_{t_k}.$$

Remarque 1.2 *Dès que nous parlons de portefeuille autofinancé il doit y avoir une compatibilité entre v et θ : $v = \langle \theta_{t_0}, S_{t_0} \rangle$. Cette compatibilité sera toujours supposée vraie dès que nous invoquons un portefeuille autofinancé.*

Proposition 1.1 *L'ensemble des portefeuilles admissibles est un sous-espace vectoriel de $L^0(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{F})$ (voir la Section A.3 pour la définition de $L^0(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{F})$). De plus, pour tout $\theta, \tilde{\theta} \in \mathcal{A}$ et $v, \tilde{v} \in \mathbb{R}$ (compatibles au sens de la remarque 1.2)*

$$\left((\theta + \tilde{\theta}) \bullet \Delta\tilde{S} \right) \; = \; \left(\theta \bullet \Delta\tilde{S} \right) + \left(\tilde{\theta} \bullet \Delta\tilde{S} \right) \quad \textit{et} \quad V^{v+\tilde{v}, \theta+\tilde{\theta}} = V^{v,\theta} + V^{\tilde{v},\tilde{\theta}}.$$

Preuve. Exercice. □

1.1.5 Contraintes de portefeuille

Des contraintes peuvent peser sur les stratégies financières d'un investisseur. En termes de modélisation, ceci revient à restreindre les stratégies financières possibles à un sous-ensemble $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{A}$ que l'on désignera par la suite comme *ensemble des portefeuilles possibles*. Par exemple :

— aucune contrainte : $\mathfrak{P} = \mathcal{A}$,

— interdiction de vente à découvert des actifs risqués :

$$\mathfrak{P} := \{\theta \in \mathcal{A} : \ \theta^i_{t_k} \geq 0 \ \ \forall i \in \{1, \cdots, d\}, \forall t_k \in \mathcal{T}\},$$

— limite sur la variabilité de la stratégie en actifs risqués :

$$\mathfrak{P} := \{\theta \in \mathcal{A} : \ |\theta^i_{t_k} - \theta^i_{t_{k+1}}| \leq \ell \ \ \forall i \in \{1, \cdots, d\}, \forall t_k \in \mathcal{T}\}$$

où ℓ est une borne fixée,

— limite sur l'investissement en actifs risqués (en l'occurrence ici sur le i-ème actif) :

$$\mathfrak{P}^{V_0} := \{\theta \in \mathcal{A} : \ |\langle \theta^i_{t_{k+1}}, S_{t_k} \rangle / V^{V_0,\theta}_{t_k}| \leq \ell \ \ \forall t_k \in \mathcal{T}\}$$

où ℓ est une borne fixée.

1.2 Opportunités d'arbitrage et leurs absences

1.2.1 Opportunités d'arbitrage

On dit qu'un marché financier comporte une opportunité d'arbitrage s'il est possible de réaliser un gain sans risque à partir d'un investissement initial nul. Plus précisément, nous adoptons la définition suivante :

Définition 1.3 (Opportunité d'arbitrage) *On dit qu'un marché financier admet une opportunité d'arbitrage si il existe $\theta \in \mathcal{A}$ tel que :*

$$\mathbb{P}\left(\tilde{V}^{0,\theta}_T \geq 0\right) = 1 \quad et \quad \mathbb{P}\left(\tilde{V}^{0,\theta}_T > 0\right) > 0.$$

Définition 1.4 (A.O.A.) *On dit que le marché financier vérifie la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage (A.O.A.) si il n'existe aucune opportunité d'arbitrage sur ce marché financier.*

1.2.2 Conséquences de l'A.O.A.

La première propriété, énoncée ci-dessous, porte sur la comparaison des valeurs et des « prix » de stratégies financières.

Proposition 1.2 *Soient* (v_1, θ_1), $(v_2, \theta_2) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$ *tels que* $V_T^{v_1,\theta_1} \geq V_T^{v_2,\theta_2}$ $\mathbb{P}-p.s.$ *En A.O.A. on a nécessairement* $v_1 \geq v_2$.

Preuve. Supposons que $v_2 > v_1$. Posons $\theta := \theta_1 - \theta_2$; alors :

$$\begin{aligned}
\left(\theta \bullet \Delta\tilde{S}\right)_T &= \left(\theta_1 \bullet \Delta\tilde{S}\right)_T - \left(\theta_2 \bullet \Delta\tilde{S}\right)_T \\
&= \left(V_T^{v_1,\theta_1}/S_T^0 - v_1\right) - \left(V_T^{v_2,\theta_2}/S^0 - v_2\right) \\
&= \left(V_T^{v_1,\theta_1} - V_T^{v_2,\theta_2}\right)/S_T^0 + (v_2 - v_1) \geq (v_2 - v_1) > 0.
\end{aligned}$$

Ainsi nous vérifions que θ est une opportunité d'arbitrage, ce qui contredit la condition A.O.A. On conclut que nécessairement $v_2 \leq v_1$. $\square$

Corollaire 1.1 *Supposons que le marché financier vérifie la condition A.O.A. Soient* (v_1, θ_1), $(v_2, \theta_2) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$ *tels que* $V_T^{v_1,\theta_1} \geq V_T^{v_2,\theta_2}$ $\mathbb{P}-p.s.$

1. *Alors* $v_1 \geq v_2$ *et* $V_{t_k}^{v_1,\theta_1} \geq V_{t_k}^{v_2,\theta_2}$, $\forall t_k \in \mathcal{T}$ *;*
2. *En particulier, si* $V_T^{v_1,\theta_1} = V_T^{v_2,\theta_2}$ $\mathbb{P}-p.s.$, *alors pour tout* $t_k \in \mathcal{T}$ *on a* $v_1 = v_2$ *et* $V_{t_k}^{v_1,\theta_1} = V_{t_k}^{v_2,\theta_2}$.

À présent nous donnons quelques conséquences importantes de la condition A.O.A. sur les prix d'actifs contingents standards : les *options vanille*. On désigne par option vanille une option d'achat ou une option de vente sur l'un des actifs risqués S^i.

Définition 1.5 (Option d'achat européenne) *On appelle option d'achat européenne ou call européen un contrat entre deux parties qui donne à l'acheteur le droit mais pas l'obligation (le vendeur est en revanche tenu de se plier à la décision de l'acheteur) :*

– d'acheter un actif financier S *(action, obligation, indice boursier, devise, matière première, autre produit dérivé, fonds, inflation, etc.), appelé actif sous-jacent,*