MECANIQUE DU POINT

Enoncés 1 à 136

Cinématique

1. Pour bien intégrer. (MP, PC, PSI, PT) ** *Solution page 71*

Une particule se déplace dans le plan horizontal (x, O, y), à la vitesse constante v_0, sur une courbe dont le rayon de courbure R est inversement proportionnel au chemin parcouru : $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \dfrac{1}{\lambda s}$, où λ est une constante. On note s l'abscisse curviligne et φ l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'axe $\mathrm{O}x$. A l'instant initial, s et φ sont nuls.

1. Montrer que l'équation de la trajectoire est donnée par : $x + iy = v_0 \int_0^t \exp\left(j \dfrac{\lambda^2 v_0^2}{2} t^2 \right) \mathrm{d}t$.

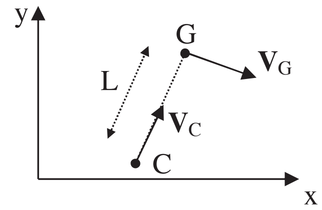
2. Tracer qualitativement la trajectoire sachant que : $\int_0^\infty \exp\left(j \dfrac{\pi}{2} u^2 \right) \mathrm{d}u = \dfrac{1+i}{2}$.

3. Quelle est l'expression de la force en fonction du chemin parcouru ?

4. Application : une automobile roule sans glisser à vitesse constante v_0 sur une autoroute rectiligne horizontale suivie d'un virage circulaire de rayon R.
Quelle est la condition sur la vitesse pour que le glissement n'apparaisse pas ?
On donne : le coefficient de frottement pneu-route $f = 0{,}4$ et $R = 200$ m. Comment les ingénieurs des T.P.E. évitent-ils les problèmes pour passer d'une portion de route rectiligne à une portion de route de courbure constante ?

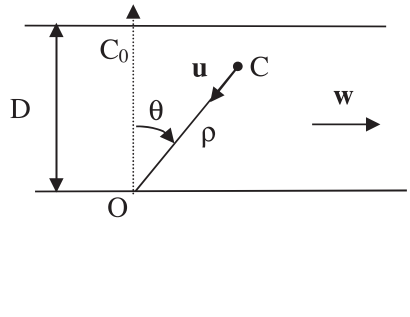
2. Chien et chat. (MP, PC, PSI, PT) * *Solution page 72*

Un chien C court après le chat G (Grosminet). Les modules de leurs vitesses sont constants et respectivement égaux à u et v.



La vitesse du chien est toujours dirigée dans la direction du chat. A l'instant t_0, selon la figure, la distance chien-chat vaut L et les vecteurs vitesses des deux animaux sont orthogonales.
Déterminer l'accélération du chien à l'instant t_0.

3. Le maître et son chien. (MP, PC, PSI, PT) ** *Solution page 72*

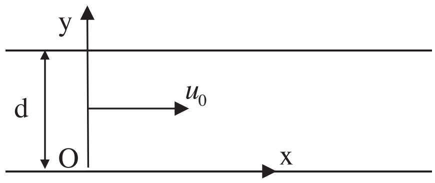


A l'instant initial, le maître est en O sur une berge d'une rivière de largeur D, le chien est en face du maître sur l'autre berge en C_0. Le chien saute à l'eau et nage dans la direction du maître avec une vitesse u constante. La vitesse du courant est constante et vaut w.

A l'instant t, la position du chien C est repérée par ses coordonnées ρ et θ.
1. Déterminer l'équation polaire de la trajectoire du chien.
2. Dans le cas où $u = w$, quelle est la nature de la trajectoire du chien ? A quelle distance du maître le chien accoste-t-il ?

4. Bateau dans un courant variable. **(MP, PC, PSI, PT)** ∗ ***Solution page 72***

Un bateau traverse un fleuve de largeur d avec une vitesse constante v_0 par rapport à l'eau et perpendiculaire au courant.



La vitesse du courant varie linéairement, des berges où elle est nulle au milieu du fleuve où elle vaut u_0.

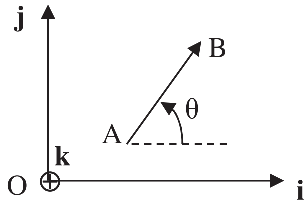
Déterminer et représenter qualitativement la trajectoire du bateau.

5. Un homme sur une échelle. **(MP, PC, PSI, PT)** ∗ ***Solution page 73***

Un homme H monte à une échelle de longueur $2L$. L'échelle est appuyée en A sur le sol et en B sur un mur vertical. Lorsque H a parcouru $\frac{3L}{2}$, l'échelle glisse. Quelle est la trajectoire de H ? On exprimera x et y en fonction de θ puis on donnera l'équation cartésienne de la trajectoire. Déterminer l'accélération de H en fonction de $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.
Connaît-on ω à tout instant ?

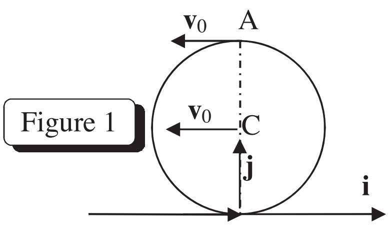
6. Dérivée d'un vecteur de module constant. **(MP, PC, PSI, PT)** ∗ ***Solution page 74***

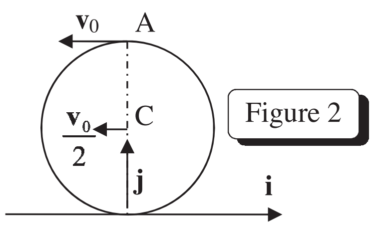
On considère un vecteur $\mathbf{AB}$ mobile dans le plan (x, O, y) et repéré par l'angle $\alpha(t)$.



1. Déterminer la dérivée par rapport au temps du vecteur $\mathbf{AB}$.
2. Le vecteur $\mathbf{AB}$ matérialise une barre solide.
Déterminer la relation entre les vitesses $\mathbf{v}_A$ et $\mathbf{v}_B$.

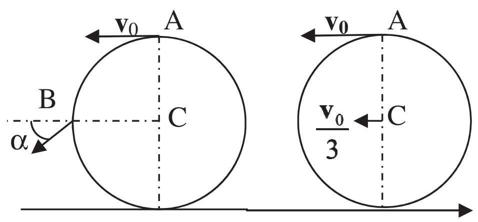
7. Première application : translation ou rotation. **(MP, PC, PSI, PT)** ∗ ***Sol page 74***





Un cerceau rigide de rayon R se déplace sur un axe horizontal, dans un plan vertical.
1. A l'instant t, le centre C et le point A ont la même vitesse $\mathbf{v}_0$ horizontale (figure 1). Que peut-on dire du mouvement du cerceau à cet instant ?
2. De nouvelles vitesses sont données sur la figure 2. Montrer que les points du cerceau semblent tourner autour d'un point I que l'on déterminera. Déterminer la vitesse de rotation instantanée du cerceau. Commenter.

8. Deuxième application : cas général. **(MP, PC, PSI, PT)** * ***Solution page 74***

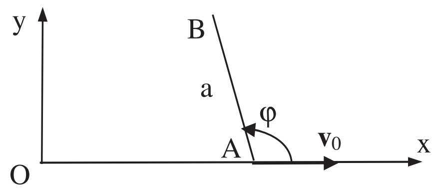


Deux cerceaux de rayon R se déplacent sur un axe horizontal, dans un plan vertical. A un instant t, des renseignements sur les vitesses de deux points de chacun d'eux sont fournis sur le schéma ci-contre $(\alpha = 45°)$.

Déterminer le vecteur rotation instantanée et le centre instantané de rotation dans chaque cas ainsi que la vitesse de B.

9. Mouvement d'une barre. **(MP, PC, PSI, PT)** ** ***Solution page 74***

Une barre AB de longueur a se déplace dans le plan (O,x,y). Le point A décrit l'axe Ox à la vitesse constante v_0. Le module de la vitesse de B est constant et égal à v_0. On note φ l'angle entre AB et Ox à l'instant t. A l'instant initial, A est en O et $\varphi = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\cdot$

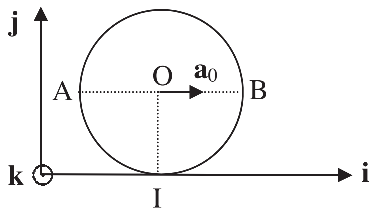


1. Représenter le vecteur vitesse du point B (il y a deux solutions). Quel est le mouvement de la barre dans le cas le plus simple ?

2. Dans le deuxième cas, déterminer l'expression du vecteur rotation en fonction du temps. En déduire les équations paramétriques $x(t)$ et $y(t)$ de la trajectoire de B. Quel est le mouvement asymptotique de la barre ?

10. Composition des accélérations. **(MP, PC, PSI, PT)** * ***Solution page 75***

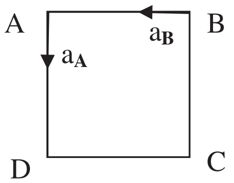
Un cerceau de rayon R roule sur un axe horizontal. A un instant donné, le centre O a une vitesse : $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{i}$ et une accélération : $\mathbf{a}_0 = a_0\mathbf{i}$.



Le point de contact a une vitesse nulle.
Déterminer l'accélération des points A et B appartenant au diamètre horizontal ainsi que l'accélération du point I de contact avec l'axe.

11. Centre instantané des accélérations. **(MP, PC, PSI, PT)** * *Solution page 75*

On considère un solide carré ABCD de côté c mobile dans son plan. A l'instant t, les accélérations $\mathbf{a}_A$ et $\mathbf{a}_B$ de A et B indiquées sur la figure, ont même module a et sont dirigées respectivement selon AD et BA.



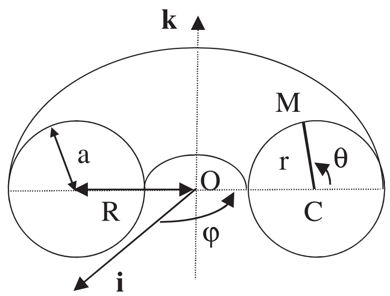
1. Déterminer la vitesse angulaire et l'accélération angulaire du carré à cet instant.
2. Déterminer le centre instantané des accélérations du carré à cet instant. En déduire les accélérations de C et D.

12. Coordonnées coniques. **(MP, PC, PSI, PT)** * *Solution page 76*

On considère un cône d'ouverture α, de hauteur h.
1. Quel est le système de coordonnées le plus approprié pour définir la position d'un point sur le cône ? Quelle est la base mobile associée ?
2. Application : déterminer l'aire de la surface latérale du cône.

13. Les coordonnées toroïdales. **(MP, PC, PSI, PT)** *** *Solution page 76*

Considérons une couronne de pain. Elle est modélisée par un tore, surface engendrée par un cercle de rayon a, tournant autour d'un axe de son plan ne le traversant pas. Le centre du cercle décrit un cercle de centre O de rayon $R > a$.
La position d'un point M de la mie est repérée par ses *coordonnées toroïdales* r, θ et φ. φ repère la position de la tranche de pain par rapport à un plan origine $(\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{k})$, r et θ sont les coordonnées polaires de M par rapport au centre C de la tranche.



1. Déterminer la base mobile associée ainsi que le vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\mathbf{OM}$ en projection sur cette base. En déduire l'aire Σ de la croûte de pain et le volume τ de la couronne de pain.
2. Le point M se déplace sur le tore $r = a$, avec des vitesses angulaires $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega = \mathrm{C^{te}}$.

Déterminer l'accélération du point M sur la base $(\mathbf{u}_\phi, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_r)$.

Taux de variation de l'accélération ou jerk (14, 15).

14. Définition du jerk. **(MP, PC, PSI, PT)** * *Solution page 77*

Une particule se déplace dans un plan rapporté au repère $R(\mathrm{O}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$. Sa position est définie par ses coordonnées polaires (r, θ) sur la base $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta)$.
1. Rappeler les expressions de la vitesse $\mathbf{v}$ et de l'accélération $\mathbf{a}$.

2. On définit le jerk $\mathbf{j}$ par : $\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{a}}{dt}$ · La connaissance du jerk est nécessaire pour les machines tournantes soumises à de brusques accélérations qui peuvent les endommager. De même, le changement de courbure des routes et des rails de chemin de fer fait intervenir la composante normale du jerk (le rayon de courbure intervient dans l'accélération normale). Exprimer les composantes de $\mathbf{j}$ sur la base $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta)$.

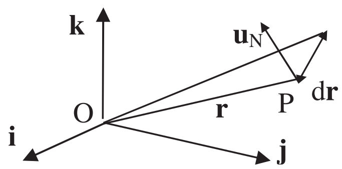
15. Une application du jerk. **(MP, PC, PSI, PT)** ** ***Solution page 77***

La Terre T décrit l'ellipse : $r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$, autour du Soleil placé en O. Son accélération est : $\mathbf{a} = -\frac{k}{r^2}\mathbf{u}_r$, où k est une constante. Déterminer les composantes tangentielle et normale de $\mathbf{j}$ en fonction de r et $\frac{dr}{d\theta}$ puis en fonction de θ. Représenter le vecteur $\mathbf{j}$ en divers points de l'ellipse pour $e = \frac{1}{2}$ · Commenter.

Base aréolaire (16, 17).

16. Définition et propriétés. **(MP, PC, PSI, PT)** ** ***Solution page 78***

Dans le référentiel $R(\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, une particule P repérée par $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$ a une vitesse $\mathbf{v}$ et un moment cinétique σ.



Dans un déplacement élémentaire, la particule se déplace de $d\mathbf{r}$ pendant le temps dt et le vecteur position balaie une aire élémentaire $d\mathbf{A} = dA\mathbf{u}_N$, où $\mathbf{u}_N$ est le vecteur unitaire normal à l'aire balayée, dans le sens indiqué sur la figure.

1. Déterminer la relation entre la vitesse aréolaire $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ et le moment cinétique σ.

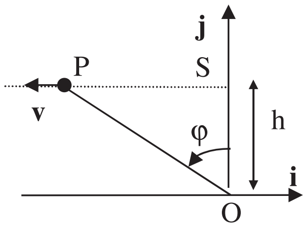
2. On appelle *base aréolaire* la base mobile orthonormée $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_T, \mathbf{u}_N)$ où $\mathbf{u}_T$ désigne le vecteur unitaire transverse $\mathbf{u}_T = \mathbf{u}_N \wedge \mathbf{u}_r$. En désignant par $\dot{\mathbf{u}}$ la dérivée temporelle d'un vecteur $\mathbf{u}$, montrer que l'on peut écrire :

$$\dot{\mathbf{u}}_N = -\alpha\mathbf{u}_T \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{u}}_r = \beta\mathbf{u}_T \text{, où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux scalaires.}$$

3. Déterminer la matrice M de passage : $\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_r \\ \dot{\mathbf{u}}_T \\ \dot{\mathbf{u}}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \mathrm{M} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_T \\ \mathbf{u}_N \end{pmatrix}$. Déterminer le vecteur rotation ω du solide associé à la base aréolaire par rapport au repère $R(\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Exprimer les composantes de $d\mathbf{r}$ et de σ sur la base aréolaire.

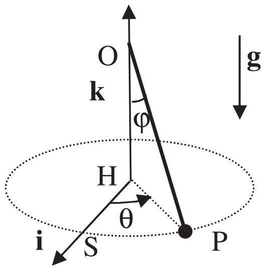
17. Applications. **(MP, PC, PSI, PT)** ** *Solution page 78*

1. Une particule P, de masse m, se déplace à vitesse constante : $\mathbf{v} = -v\mathbf{i}$.



A l'instant elle est en $S(0,h,0)$. Déterminer la base aréolaire ainsi que α et β en fonction de φ. Calculer le moment cinétique. Commenter.

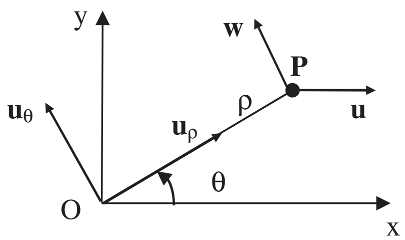
2. La particule est soumise à une force centrale. Caractériser la base aréolaire et son vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$.



3. Un fil inextensible de longueur r, fixé en O supporte une particule P. OP fait un angle φ constant avec la verticale, la particule décrit un cercle de centre H de rayon HP=R et sa position est repérée par l'angle θ que fait HP avec HS, S étant la position initiale de P. Déterminer la base aréolaire ainsi que α et β en fonction de $\dot{\theta}$. Calculer $\dot{\theta}$ et commenter.

18. Modèle cinématique de la gravitation. **(MP, PC, PSI, PT)** ** *Solution page 79*

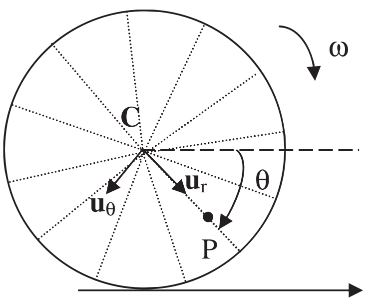
Dans le repère plan $R(\mathrm{O},\mathbf{i},\mathbf{j})$, se déplace une particule P. On note ρ et θ ses coordonnées polaires et $(\mathbf{u}_\rho,\mathbf{u}_\theta)$ la base mobile associée. Le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ de P est égal à : $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + w\mathbf{u}_\theta$, où u et w sont des constantes.



1. Déterminer la trajectoire de P en fonction de $e = \dfrac{u}{w}$.
2. Déterminer l'accélération de P en fonction de la seule variable ρ. Commenter.

19. La roue floue. **(PC, PT)** ** *Solution page 79*

Une roue de bicyclette de centre C, de rayon R, roule sans glisser sur un axe horizontal. On note ω la vitesse angulaire de la roue.

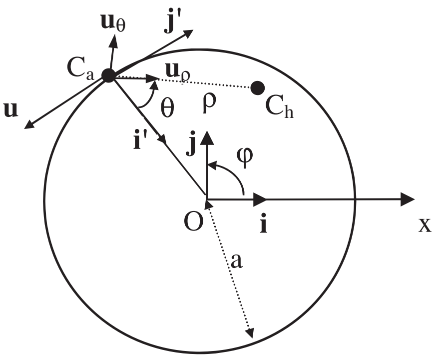


On repère un point P d'un rayon par ses coordonnées (r,θ) relativement à C.

1. Exprimer la vitesse de P sur la base $(\mathbf{u}_r,\mathbf{u}_\theta)$.
2. Déterminer l'ensemble des points P des rayons de la roue qui ont une vitesse instantanée radiale. En déduire l'aspect de la photo de la roue si le temps de pose est assez long.

20. La chasse au canard. **(MP, PC, PSI, PT)** ** ***Solution page 80***

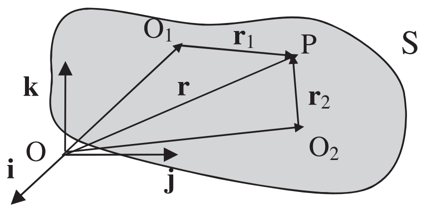
Un canard C_a nage à vitesse constante u en restant au bord d'un étang circulaire de centre O, de rayon a. Un chien C_h poursuit le canard. Il nage dans sa direction avec une vitesse $w < u$. Dans le repère de l'étang $R_1(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, la position du canard est donnée par l'angle φ que fait OC_a avec Ox. Dans le repère du canard $R_2(C_a, \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ où $\mathbf{i}'$ est un vecteur unitaire dirigé de C_a vers O et $\mathbf{j}'$ le vecteur directement perpendiculaire. La position du chien est donnée par ses coordonnées polaires ρ et θ.



1. Déterminer les équations différentielles du mouvement du chien en fonction du temps dans le repère de l'étang.
2. Dans le cas particulier où la vitesse du chien $w = \dfrac{u}{2}$, montrer que la trajectoire asymptotique du chien est un cercle dont on déterminera le rayon. Montrer que l'angle φ tend vers une valeur limite que l'on calculera.

21. Unicité de la vitesse angulaire d'un solide. **(MP, PC, PSI, PT)** ** ***Sol page 80***

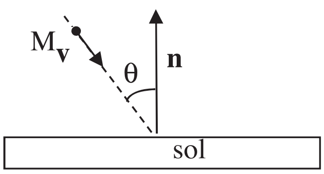
On considère un référentiel $R(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ et trois points O_1, O_2 et P d'un solide S, repérés par $\mathbf{OO_1} = \mathbf{R}_1$, $\mathbf{OO_2} = \mathbf{R}_2$, $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$. On note $\mathbf{O_1P} = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{O_2P} = \mathbf{r}_2$ et $\mathbf{O_1O_2} = \mathbf{R}$. On suppose que la rotation du solide se fait avec un vecteur $\boldsymbol{\omega}_1$ autour du point O_1 et un vecteur $\boldsymbol{\omega}_2$ autour du point O_2.

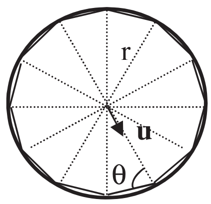


Ecrire de deux façons les dérivées temporelles de $\mathbf{r}$ et $\mathbf{R}$ dans $R(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ et en déduire que le vecteur rotation est unique.

22. Mouvement circulaire au temps de Newton. **(MP, PC, PSI, PT)** ** ***Sol page 81***

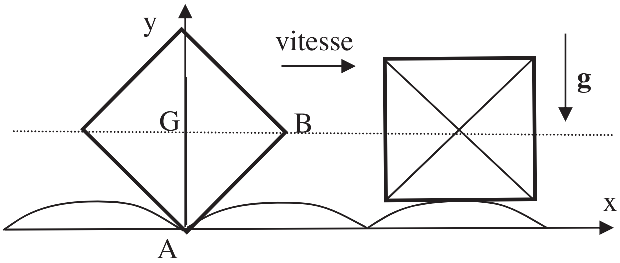
Une particule M de masse m subit un choc élastique sur un sol horizontal.
1. Déterminer la variation de sa vitesse en fonction de l'angle d'incidence θ et du module de sa vitesse v.





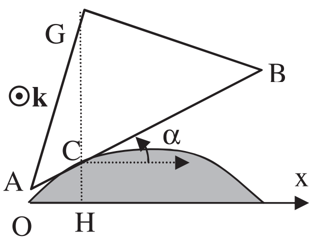
2. On remplace le mur par un cercle rigide fixe de rayon r. La particule subit une succession de chocs élastiques sur le cercle. La trajectoire est alors un polygone régulier à n côtés ($n=12$ sur l'exemple de la figure). Déterminer l'accélération de M si $n \to \infty$. Quelle est la force équivalente aux chocs ?
3. On considère deux planètes de masses m_1 et m_2, tournant autour du Soleil selon des orbites circulaires de rayon R_1 et R_2.
Connaissant la troisième loi de Kepler, comment Newton put-il en déduire la loi de la gravitation universelle ?

23. La roue carrée. (MP, PC, PSI, PT) ** *Solution page 81*



Dans le plan vertical (x,O,y) d'un repère galiléen, une roue carrée homogène, de centre G, de côté $2a$ roule sans glisser sur un sol bosselé.

La trajectoire de G est une droite horizontale. A l'instant initial, la diagonale GA est verticale et le sommet A se confond avec l'origine O du repère.



La figure ci-contre représente le quadrant GAB de la roue à l'instant t. Le coté AB est tangent au profil de la bosse au point C de coordonnées (x,y) et fait l'angle α avec l'horizontale. On cherche le profil par son équation cartésienne $y = f(x)$.

1. Montrer que la fonction $f(x)$ suit l'équation : $1+\left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \left(\sqrt{2}-\dfrac{f}{a}\right)^2 \cdot$ Sachant que $f(0)=0$, montrer que le profil de la bosse est un arc de chaînette : $y = a\left(\sqrt{2}-\mathrm{ch}\left(k-\dfrac{x}{a}\right)\right)$ en précisant k. En déduire la période spatiale p des bosses.
2. Exprimer le vecteur rotation de la roue et écrire la condition de roulement sans glissement. Déterminer la vitesse v de G en fonction de α sachant que le moment d'inertie de la roue par rapport à l'axe horizontal passant par G est : $I = \dfrac{1}{3}ma^2$. Comparer au cas d'un disque roulant sans glisser sur un sol parfaitement plat.

24. Accélération en double produit vectoriel. (MP, PC, PSI, PT) * *Solution page 82*

Dans le repère $R(\mathrm{O},\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$, les vecteurs position $\mathbf{OM}$, vitesse $\mathbf{v}$ et accélération $\mathbf{a}$, d'une particule M sont liées par : $\mathbf{a} = -\mathbf{v} \wedge (\mathbf{OM} \wedge \mathbf{v})(\mathbf{OM})^{-2}$.