Fiches de cours

Pré-requis

Thème 1 : analyse, dérivation

f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est finie.

On a alors dans ce cas $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

➡ Dérivabilité de carré en a puis en 2 :

$x \mapsto f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}, h \neq 0$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h}$$

$$= \frac{h \times (2a+h)}{h} = 2a + h \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \to 0}(2a+h) = 2a.$$

La limite vaut $2a$ et elle est finie.

f est donc dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

➡ Application : f étant dérivable en tout a réel, f l'est encore en 2 et $f'(2) = 2 \times 2 = 4$.

➡ Dérivabilité de racine en 0

$x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[0;+\infty[$.

Par souci de définition, on fera tendre h vers 0 avec $h > 0$.

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

La limite n'est pas un nombre fini, donc f n'est pas dérivable en 0. Graphiquement, on peut voir interpréter cela comme une demi-tangente verticale.

À retenir

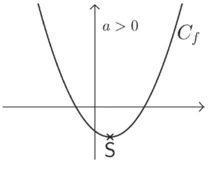
Les fonctions valeur absolue et racine ne sont pas dérivables en 0.

Thème 2 : analyse, second degré, courbe et équation

➡ Polynômes du 2nd degré : $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$

Fonction dérivée : $f'(x) = 2ax + b$



Courbe : C_f est une parabole orientée vers le haut si $a > 0$.
C_f est une parabole orientée vers le bas si $a < 0$.

- Formes

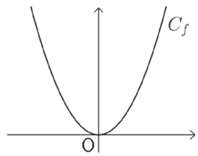
  Développée : $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

  Factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, $a \neq 0$ si 2 racines x_1 et x_2

  Canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, $a \neq 0$ et $\alpha = -b/2a$

Le sommet S de la parabole est de coordonnées $S(\alpha;\beta)$.
La droite d'équation $x = \alpha$ est axe de symétrie de la parabole.

Cas particulier : carrée $f(x) = x^2$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$
Fonction dérivée : $f'(x) = 2x$
Courbe : parabole de sommet $S(0;0)$ orientée vers le haut.



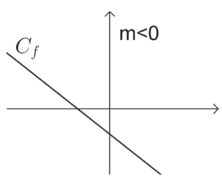
Un polynôme de degré n s'écrit $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$

➡ Équation du 2nd degré : $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$
Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = b^2 - 4ac$.
Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution.
Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$
Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

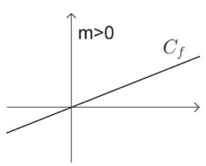
Thème 3 : analyse, fonctions usuelles de 1re S

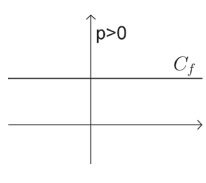
➡ Fonctions affines : $f(x) = mx + p$, $m \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}$
Cas général : fonctions affines
Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$
Fonction dérivée : $f'(x) = m$



Proportionnalité des écarts : $f(u) - f(v) = m(u - v)$
Courbe : C_f est une droite.
Cas particuliers : fonctions linéaire et constante

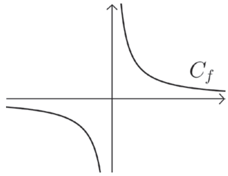
Fonction linéaire : $f(x) = mx$, $p = 0$
Courbe : C_f est une droite qui passe par l'origine.





Fonction constante : $f(x) = p$, $m = 0$
Courbe : C_f est une droite horizontale

➞ Inverse $f(x)=\dfrac{1}{x}$

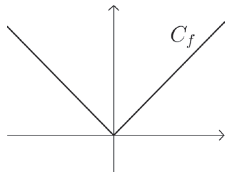


Ensemble de définition : $D_f=\mathbb{R}^*$,
0 est une valeur interdite.

Fonction dérivée : $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

Courbe : C_f est une hyperbole centrée en O.

➞ Valeur absolue $f(x)=|x|=\begin{cases} x \ si \ x\geq 0 \\ -x \ si \ x\leq 0 \end{cases}$

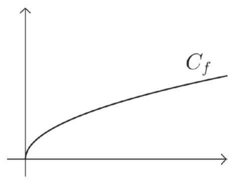


Ensemble de définition : $D_f=\mathbb{R}$

Fonction dérivée : $f'(x)=\begin{cases} 1 \ si \ x\geq 0 \\ -1 \ si \ x\leq 0 \end{cases}$

Courbe : C_f est une réunion de deux droites affines.

➞ Racine $f(x)=\sqrt{x}$



Ensemble de définition : $D_f=\mathbb{R}_+$

Ensemble de dérivation : $D_{f'}=\mathbb{R}_+^*$

Fonction dérivée : $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Thème 4 : probabilités

Vocabulaire	Définitions	Exemple
expérience aléatoire	expérience dont le résultat est dû au hasard.	tirage d'une carte dans un jeu de 52 cartes
issue	résultat d'une expérience aléatoire.	l'as de cœur.
univers	ensemble de toutes les issues.	l'ensemble des 52 cartes
évènement	sous partie de l'univers.	obtenir un roi, obtenir un carreau.
évènement élémentaire	évènement n'ayant qu'une seule issue.	obtenir le roi de carreau.

La réunion de A et B se note $A\cup B$. L'intersection de A et B se note $A\cap B$.

Partie de Ω	Vocabulaire des évènements	Propriété
A	A quelconque	$0 \leq P(\text{A}) \leq 1$
$\varnothing, \Omega$	Évènement impossible, évènement certain	$P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$
$\text{A} \cap \text{B} = \varnothing$	A et B sont incompatibles	$P(\text{A} \cap \text{B}) = 0$
$\overline{\text{A}}$	$\overline{\text{A}}$ est l'évènement contraire de A	$P(\overline{\text{A}}) = 1 - P(\text{A})$
A, B	A et B quelconques	$P(\text{A} \cup \text{B}) \neq P(\text{A}) + P(\text{B})$

➡ Probabilités d'un évènement

Par définition, la probabilité d'un évènement A est la somme de toutes les probabilités des issues réalisant A.

➡ Loi de probabilité équi-répartie

Soit $P = (p_1, ..., p_n)$ une loi de probabilité sur $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

La loi P est équi-répartie sur Ω si tous les p_i sont égaux. $P(e_i) = p_i = \dfrac{1}{n}$

Thème 5 : géométrie

➡ Repérage : $K(x_K ; y_K)$ milieu de $[AB]$: $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

➡ Distance : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$

➡ Angles et vecteurs :

$(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$; $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$; $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$

Relation de Chasles : $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$

➡ Produit scalaire : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$ ou $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\| \vec{u} \right\| \times \left\| \vec{v} \right\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Test d'orthogonalité : $xx' + yy' = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux

Test de colinéarité : $xy' - x'y = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

➡ Les droites

Équation réduite : $y = mx + p$ avec $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ coefficient directeur

Équation cartésienne : $ax + by + c = 0$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ vecteur directeur

Définition

Un algorithme est un enchaînement d'étapes ou d'instructions à effectuer dans un ordre précis et dont la résolution permet de résoudre un problème donné.
Un algorithme simple comporte trois étapes :
1. Variables et affectations 2. Le traitement 3. La sortie des résultats

1. Variables et affectations

Il s'agit de la préparation du traitement à proprement parler de l'algorithme. Cette partie fait l'inventaire des données et variables nécessaires au bon fonctionnement de l'algorithme.

Les valeurs initiales des variables peuvent être présentes dans l'algorithme ou bien demandées à l'utilisateur.

Cette étape est parfois scindée en deux parties appelées « variables » et « entrée et initialisation ».

2. Le traitement

C'est le cœur même de l'algorithme. Il contient toutes les étapes de traitement. L'ordre des instructions est fondamental afin que l'algorithme aboutisse au résultat demandé. Si une erreur dans l'ordre des séquences est commise, il est même possible que l'algorithme ne s'arrête jamais.

3. La sortie des résultats

Dans les algorithmes traités au lycée, les résultats obtenus sont affichés à l'écran de l'ordinateur ou de la calculatrice. Un algorithme peut donner une valeur précise d'un terme d'une suite, les n premiers termes d'une suite, un encadrement de la solution d'une équation ou encore un message…

4. Exemple : L'affectation

Ci-dessous l'algorithme ayant pour but de calculer les coordonnées du milieu I d'un segment [AB]. Le début du traitement demande à l'utilisateur de donner les coordonnées des points A et B.

Variables : $x\mathrm{A}$, $x\mathrm{B}$, $y\mathrm{A}$, $y\mathrm{B}$, $x\mathrm{I}$, $y\mathrm{I}$ sont des réels

Traitement : Saisir $x\mathrm{A}$, $x\mathrm{B}$, $y\mathrm{A}$, $y\mathrm{B}$

$x\mathrm{I}$ prend la valeur $\frac{1}{2}(x\mathrm{A}+x\mathrm{B})$

$y\mathrm{I}$ prend la valeur $\frac{1}{2}(y\mathrm{A}+y\mathrm{B})$

Sortie : Afficher $(x\mathrm{I}; y\mathrm{I})$

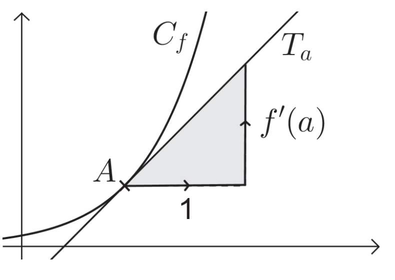
1 Fonctions et nombres dérivés

Fiche

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivation
$k\ ,\ k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
x^n $n \in \mathbb{Z}^*$ et $n \neq 1$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n>1$ $\mathbb{R}^*$ si $n<0$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$

Équation de la tangente T_a à C_f au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

Le nombre dérivé de f en a est le coefficient directeur de la tangente au point $A(a; f(a))$.



2 Opérations et dérivation

Fiche

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Fonction dérivée	Intervalle de dérivation
$u+v$	$u'+v'$	I
$k\times u$, $k\in\mathbb{R}$	$k\times u'$, $k\in\mathbb{R}$	I
$u\times v$	$u'v+uv'$	I
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	I avec $v\neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	I avec $v\neq 0$

On découvre en terminale les formules suivantes :

Fonction	Fonction dérivée	Intervalle de dérivation
u^2	$2u'u$	I
u^n , $n\in\mathbb{Z}^*$	$n\times u'u^{n-1}$	I avec $u\neq 0$ si $n<0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	I avec $u>0$
$f(u)$	$u'\times f'(u)$	$u(x)\in D_{f'}$

➞ Fonctions polynômes : toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

➞ Fonctions rationnelles : toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

➞ Théorème : toute fonction dérivable sur I est continue sur I.

La réciproque est fausse. Exemple : la fonction valeur absolue est continue en 0 mais non dérivable en 0.