Chapitre 1

Cinématique

Objectifs du chapitre

– Savoir définir le cadre d'étude d'un mouvement.
– Savoir déterminer l'accélération, la vitesse et la trajectoire d'un point.

Introduction

Si on tire une armoire, l'armoire se met **en mouvement**.
Si un gardien de handball attrape une balle, la balle **s'arrête**.
Ces exemples de la vie courante mettent en évidence un lien entre les actions mécaniques qui s'exercent sur un objet, les forces, et son mouvement.
Dans ce chapitre nous allons étudier différents mouvements que peuvent prendre les objets, en fonction du temps. C'est appelé **la cinématique**.

1 Cadre d'étude

1.1 Définitions

1.1.1 Système d'étude

Le système d'étude est **l'objet** dont on cherche à caractériser le mouvement. Pour déterminer le système il faut répondre à la question : **de quoi ou de qui cherche-t-on le mouvement ?**

1.1.2 Centre d'inertie

Il est difficile de définir le mouvement de tous les points du système. Donc on simplifie le problème en étudiant un point particulier du système : **le centre d'inertie noté G**. On admet que **le centre d'inertie est confondu avec le centre de gravité** des objets.
Le centre d'inertie des objets homogènes de forme géométrique simple est le centre géométrique.

1.1.3 Référentiel

Un référentiel est un **solide** par rapport auquel on étudie le mouvement d'un objet. Le référentiel est l'objet qui répond à la question : **le mouvement par rapport à quoi ?**

1.1.4 Trajectoire

La trajectoire d'un solide est **l'ensemble de ses positions successives prises au cours du temps**.
On détermine les caractéristiques du vecteur trajectoire noté $\overrightarrow{OM}$, en répondant aux questions suivantes :
- D'où part l'objet ?
- Quelle est sa direction ?
- Dans quel sens se dirige-t-il ?
- Où va-t-il ?

Exemple : un parachutiste saute d'un hélicoptère en vol stationnaire. Le parachutiste part de l'hélicoptère, sa direction est la verticale, il se dirige de haut en bas et il va vers le sol.
Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'utilise dans **un repère**.

1.2 Repère

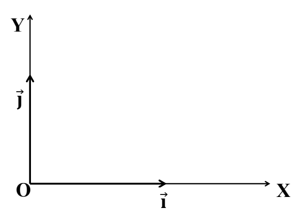

FIGURE 1.1 – Le repère

1.2.1 Légende

On se place dans le repère représenté sur la figure (1.1), pour réaliser l'étude d'un système. Le repère est **orthogonal**, c'est-à-dire que les 2 axes (Ox) horizontal (aussi appelé abscisse) et (Oy) vertical (aussi appelé ordonné) sont perpendiculaires.
Le vecteur $\overrightarrow{i}$ est le vecteur unitaire de l'axe (Ox) et le vecteur $\overrightarrow{j}$ est le vecteur unitaire de l'axe (Oy). Ce sont des vecteurs unitaires, car leur norme est égale à 1 (l'unité).
Ces informations doivent obligatoirement figurer sur le repère, comme une légende sur une carte.
Le repère est choisi pour faciliter l'étude des forces.
On parle indifféremment de repère (O,x,y) ou de repère (O, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$).

1.2.2 Trajectoire dans le repère

La trajectoire du système d'étude est notée : $\overrightarrow{OM}$, et représentée sur la figure (1.2).
Le point O, centre du repère, a pour coordonnée (0,0) et les coordonnées du point M sont : (x,y).
Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit dans le repère :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} \tag{1.1}$$

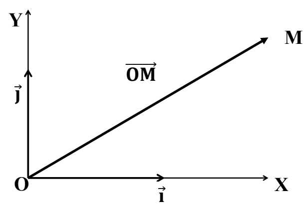

Figure 1.2 – La trajectoire dans le repère

Remarque : il ne faut pas confondre le X de la légende et le x des coordonnées du point M.

1.3 Exemple

On s'intéresse aux mouvements de trois écoliers.
Pour chaque situation, on cherche à déterminer le référentiel et le système d'étude.

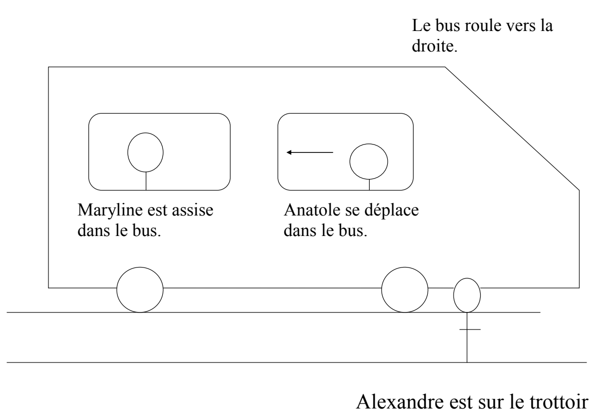

Figure 1.3 – Choix du référentiel

Sur la figure (1.3), Alexandre est sur le trottoir, Anatole se déplace dans le bus et Maryline est assise dans le bus qui se déplace par rapport au trottoir.

Quel est le mouvement de Maryline ?
De **qui** cherche-t-on le mouvement ? Le système d'étude est l'écolière : Maryline.
On cherche le mouvement de Maryline **par rapport à quoi** ?
- Si, on cherche son mouvement **par rapport au bus**, le référentiel est le bus. Le mouvement de Maryline est immobile (car elle est assise dans le bus).
- Par contre, si on cherche son mouvement **par rapport à Alexandre** (ou au trottoir), le référentiel est Alexandre (ou le trottoir). Elle n'est plus immobile dans ce référentiel mais en mouvement car Alexandre voit Maryline s'éloigner.

Quel est le mouvement d'Alexandre ?
Le système d'étude est Alexandre. Là encore, le choix du référentiel est important pour déterminer son mouvement.
- Si on cherche son mouvement **par rapport au bus**, le référentiel est le bus. Alexandre est en mouvement car Maryline, toujours immobile dans le référentiel du bus, voit Alexandre s'éloigner.
- Par contre, si **le référentiel d'étude est le trottoir**, Alexandre est immobile.

Quel est le mouvement d'Anatole ?
Le système d'étude est Anatole.
- Dans le référentiel du trottoir, Anatole est en mouvement car Alexandre le voit se déplacer.
- Dans le référentiel du bus, il est en mouvement car Maryline le voit Anatole avancer vers elle.

Le choix du référentiel est donc très important pour déterminer le mouvement du système.

2 Vitesse

2.1 Vitesse moyenne

2.1.1 Exemple

Quand on parcourt 100 km en voiture en 1 heure, on roule **en moyenne** à une vitesse de 100 km/h.

2.1.2 Définition

La vitesse moyenne notée v_m d'un objet s'exprime en mètre par seconde (m/s). Elle est égale au quotient de la distance parcourue (notée : d exprimée en mètre) et de la durée du déplacement (notée : t exprimée en seconde) dans le référentiel d'étude.

$$v_m = \frac{d}{t} \tag{1.2}$$

Avec :
- v : la vitesse qui s'exprime en m/s.
- d : la distance s'exprime en m.
- t : le temps s'exprime en s.

Remarque : l'unité de la vitesse dans le système international est le mètre par seconde (m/s), mais on utilise parfois le kilomètre par heure (km/h).

2.1.3 Conversion

Pour passer de km/h à m/s ou inversement, il faut réaliser des conversions.
Pour gagner du temps, on peut retenir :

$$
\begin{aligned}
1 \text{ km/h} &= \frac{1}{3,6} \text{ m/s} \\
3,6 \text{ km/h} &= 1 \text{ m/s}
\end{aligned}
$$

Démonstration rapide

$$1 \text{ km/h} = \frac{1 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ h}} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1}{3,6} \text{ m/s}$$

Exemple 1 :

$$
\begin{aligned}
100 \text{ km/h} &= \frac{100}{3,6} \text{ m/s} \\
100 \text{ km/h} &\approx 27,8 \text{ m/s}
\end{aligned}
$$

Exemple 2 :

$$
\begin{aligned}
10 \text{ m/s} &= 10 \times 3,6 \text{ km/h} \\
10 \text{ m/s} &= 36 \text{ km/h}
\end{aligned}
$$

2.2 Vitesse instantanée

2.2.1 Exemple

Lors d'un contrôle radar, l'appareil ne mesure pas la vitesse moyenne sur tout le trajet parcouru, mais la vitesse **à un instant donné**, noté t_i en un point précis M_i.

2.2.2 Définition 1

On repère 3 positions, M_{i-1}, M_i et M_{i+1}.
Le système étudié passe au point M_{i-1} à un instant t_{i-1}, il passe au point M_i à l'instant t_i et au point M_{i+1} au temps t_{i+1}.
L'intervalle de temps entre les points M_{i-1} et M_{i+1} est $t_{i+1} - t_{i-1}$.
On cherche la vitesse instantanée au point M_i notée v_i qui s'exprime en mètre par seconde.
La vitesse instantanée se calcule avec la relation :

$$v_i = \frac{M_{i+1}M_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \tag{1.3}$$

Avec :
- v_i : la vitesse instantanée du point M_i.
- $M_{i+1}M_{i-1}$: la distance séparant les points M_{i+1} et M_{i-1}.
- $t_{i+1} - t_{i-1}$: la durée s'écoulant entre le passage aux points M_{i+1} et M_{i-1} (cette durée doit être la plus petite possible).

Exemple d'application de la définition 1

On enregistre le mouvement d'une bille. On appelle **tau**, noté τ l'intervalle de temps entre chaque position de la bille (τ s'exprime en seconde).
On prend : $\tau = 10$ s.
On cherche la vitesse au point M_2, notée v_2. On utilise l'équation (1.3) en remplaçant le i par 2 :

$$v_2 = \frac{M_{2+1}M_{2-1}}{t_{2+1} - t_{2-1}}$$

$$v_2 = \frac{M_3M_1}{t_3 - t_1}$$

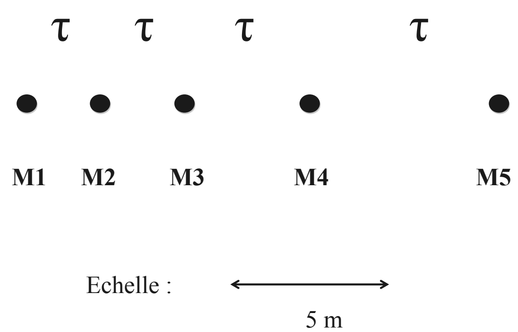

FIGURE 1.4 – La trajectoire

Il faut déterminer la distance parcourue entre les points M_3 et M_1 sur la figure (1.4) et le temps écoulé entre ces deux points.
Pour connaitre la distance M_3M_1, il faut utiliser l'échelle indiquée sur la figure (1.4), on trouve :

$$M_3M_1 = 5 \text{ m}$$

Le temps séparant les deux points, M_3 et M_1 est : 2τ.

$$t_3 - t_1 = 2 \times \tau$$

On remplace dans l'expression de v_2 :

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{M_3M_1}{2 * \tau} \\ v_2 &= \frac{5}{20} \\ v_2 &= 0,25 \text{ m/s} \end{aligned}$$

La vitesse au point M_2 est de $0,25$ m/s.
On vient de déterminer la **norme** du vecteur vitesse.
Pour représenter le vecteur vitesse sur le graphique, il faut utiliser l'échelle des vitesses (elle n'est pas dans la même unité que pour la distance).

- Point de départ du vecteur : point M_2.
- Direction : celle de la droite (M_1M_3).
- Sens : du point M_1 vers M_3.
- Norme : 0,25 en tenant compte de l'échelle du dessin.

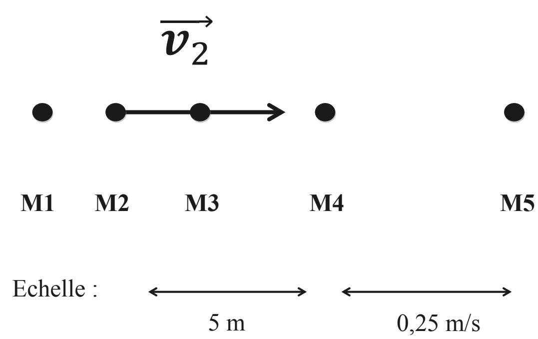

FIGURE 1.5 – Vecteur vitesse au point M2

Remarques :

- l'échelle des distances est en mètre alors que l'échelle des vitesses est en mètre par seconde ;
- si vous éprouvez des difficultés pour tracer un vecteur, vous pouvez vous référer au **chapitre 11 : Fiches aides, partie : outils mathématiques.**

2.2.3 Définition 2

Dans un référentiel donné, le vecteur vitesse du centre d'inertie G d'un solide à un instant donné t est la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

$$\overrightarrow{v_G} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \tag{1.4}$$

Remarque : cette équation se lit : "le vecteur vitesse du centre d'inertie G est égale à la dérivée (fonction mathématique représenté par la lettre d) du vecteur O M par rapport au temps t".

Exemple d'application de la définition 2

On considère un objet dont le centre d'inertie est appelé G.
On utilise l'équation (1.4).

$$\overrightarrow{v_G} = \frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{OM})}{\mathrm{d}t}$$

En utilisant l'équation (1.1), on peut écrire :

$$\overrightarrow{v_G} = \frac{\mathrm{d}(x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j})}{\mathrm{d}t}$$

$$\overrightarrow{v_G} = \frac{\mathrm{d}(x)}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{i} + \frac{\mathrm{d}(y)}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{j}$$

On appelle v_x la composante de la vitesse du centre d'inertie G suivant l'axe (Ox) et v_y la composante de la vitesse suivant l'axe (Oy).
La vitesse décomposée sur les axes, s'écrit :

$$\overrightarrow{v_G} = v_{Gx}\,\overrightarrow{i} + v_{Gy}\,\overrightarrow{j}$$

On comparant les deux expressions de la vitesse, on a alors :

$$\begin{cases} v_{G_x} = \dfrac{\mathrm{d}(x)}{\mathrm{d}t} \\ \\ v_{G_y} = \dfrac{\mathrm{d}(y)}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

Remarque : x et y sont des fonctions du temps. Rigoureusement, il faudrait écrire $x(t)$ et $y(t)$, mais pour simplifier l'écriture, on omet de préciser la dépendance en temps car cela est implicite.
De plus, la vitesse est une grandeur algébrique, elle peut être positive ou négative.
Si vous éprouvez des difficultés, vous pouvez vous référer au **Chapitre 11 : Fiches aides, sous-parties : méthodes 3 et 4 (dérivée/intégrale)**.

3 Accélération

De même que le vecteur vitesse caractérise les variations de la trajectoire $\overrightarrow{OM}$ au cours du temps, le vecteur accélération caractérise les variations du vecteur vitesse dans le temps.

3.1 Mise en évidence de l'accélération

Une voiture arrêtée à un stop, a une vitesse nulle. Quand le feu passe au vert, sa vitesse augmente.
La voiture subit alors une accélération, car la vitesse varie.
Sur l'autoroute, cette même voiture roule à 130 km/h, sa vitesse ne varie pas, son accélération est nulle.
On se rend compte que ce n'est pas la vitesse qui est responsable de l'accélération, mais bien **la variation de vitesse**.
Si le vecteur vitesse du système d'étude varie (en norme, en sens ou en direction) au cours du temps, alors le système subit une accélération.