Première partie

Algèbre

Chapitre n° 1

Algèbre générale

ENS

Planche n° 1 (sup)

THÈME : POLYNÔME COMPLEXE, PRINCIPE DU MAXIMUM

On note $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ et $\partial D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que

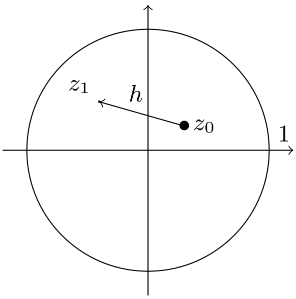
$$\max_{z \in D} |P(z)| = \max_{z \in \partial D} |P(z)|.$$

Réponse :

Commentaires

La démonstration repose sur un raisonnement par l'absurde. On suppose que le maximum (qui existe) est atteint en un point z_0 intérieur au disque. En choisissant judicieusement une direction, on trouve un point $z_1 = z_0 + h$ du disque unité ouvert tel que $|P(z_1)| > |P(z_0)|$.

Remarquons que la continuité de $z \mapsto |P(z)|$ sur la partie fermée et bornée D assure l'existence du maximum.
Si le polynôme P est constant alors la propriété est trivialement vérifiée. On suppose que P est non constant.
Supposons que le maximum soit atteint en un point z_0 intérieur au disque D.



Soit h un complexe non nul. Posons $z_1 = z_0 + h$. En notant n le degré de P, on a par la formule de Taylor pour les polynômes :

$$P(z_1) = P(z_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} h^k = P(z_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} h^k.$$

Posons pour tout $k \geq 1$, $a_k = \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}$. Si tous les a_k sont nuls alors P est constant. Il existe donc a_r tel que a_r est le premier coefficient a_k non nul pour $k \geq 1$. Avec ces notations, nous avons

$$P(z_1) = P(z_0) + a_r h^r + h^{r+1} \underbrace{\left(a_{r+1} + \ldots + a_n h^{n-r-1}\right)}_{=\varphi(h)}$$

ou encore

$$P(z_0) + a_r h^r = P(z_1) - h^{r+1}\varphi(h).$$

Par inégalité triangulaire :

$$|P(z_0) + a_r h^r| \leq |P(z_1)| + \left|h^{r+1}\varphi(h)\right|$$

donc

$$|P(z_0) + a_r h^r| - \left|h^{r+1}\varphi(h)\right| \leq |P(z_1)|\,.$$

Écrivons les formes exponentielles des complexes $P(z_0) = a\,\mathrm{e}^{i\alpha}$, $a_r = b\,\mathrm{e}^{i\beta}$ et $h = |h|\,\mathrm{e}^{i\theta}$. (Notons que $P(z_0)$ est non nul sinon P est nul.) Ainsi,

$$\begin{aligned}
|P(z_1)| &\geq \left|a\,\mathrm{e}^{i\alpha} + b|h|^r\,\mathrm{e}^{i(\beta+r\theta)}\right| - |h|^{r+1}|\varphi(h)| \\
&\geq \left|\mathrm{e}^{i\alpha}\left(a + b|h|^r\,\mathrm{e}^{i(\beta+r\theta-\alpha)}\right)\right| - |h|^{r+1}|\varphi(h)| \\
&\geq \left|a + b|h|^r\,\mathrm{e}^{i(\beta+r\theta-\alpha)}\right| - |h|^{r+1}|\varphi(h)|
\end{aligned}$$

On choisit θ tel que $\beta + r\theta - \alpha = 0\,[2\pi]$ de sorte que $\mathrm{e}^{i(\beta+r\theta-\alpha)} = 1$. Ainsi,

$$|P(z_1)| \geq \left|a + b|h|^r\right| - |h|^{r+1}|\varphi(h)| = a + b|h|^r - |h|^{r+1}|\varphi(h)| = a + |h|^r(b - |h||\varphi(h)|).$$

Maintenant, on choisit $|h|$ suffisamment petit de telle sorte que d'une part $|h||\varphi(h)| < b$ et d'autre part le point $z_1 = z_0 + h$ soit à l'intérieur de D. On a alors

$$|P(z_1)| > a = |P(z_0)|$$

ce qui est contradictoire avec la définition de z_0.

Commentaires

Nous avons montré en fait que si P est un polynôme complexe non constant, il n'a pas de maximum local à l'intérieur du disque unité.
Cette propriété s'appelle le principe du maximum. Elle s'applique plus généralement aux fonctions dites entières c'est-à-dire développables en série entière en tout point de $\mathbb{C}$.
Proposons une autre démonstration du principe du maximum pour les polynômes.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Supposons par l'absurde que le maximum de $|P|$ soit atteint en un point z_0 intérieur au disque D. Écrivons dans la base des $(z - z_0)^i$:

$$P(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \ldots + b_n(z - z_0)^n.$$

Calculons l'intégrale pour $0 < r < 1 - |z_0|$ (de telle sorte que $z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in D$).

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| P\left(z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right) \right|^2 \mathrm{d}\theta.$$

En utilisant le fait que pour un complexe u, $|u|^2 = u\overline{u}$:

$$\begin{aligned} \left| P\left(z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right) \right|^2 &= \left| b_0 + b_1 r\,\mathrm{e}^{i\theta} + \ldots + b_n r^n\,\mathrm{e}^{in\theta} \right|^2 \\ &= (b_0 + b_1 r\,\mathrm{e}^{i\theta} + \ldots + b_n r^n\,\mathrm{e}^{in\theta})(\overline{b_0} + \overline{b_1} r\,\mathrm{e}^{-i\theta} + \ldots + \overline{b_n} r^n\,\mathrm{e}^{-in\theta}). \end{aligned}$$

Par développement et linéarité de l'intégrale, $I(r)$ apparaît comme une combinaison linéaire d'intégrales du type

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}.$$

On en déduit que

$$I(r) = |b_0|^2 + r^2|b_1|^2 + \ldots + r^{2n}|b_n|^2.$$

Mais comme pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\left|P\left(z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right| \leq |P(z_0)| = b_0$:

$$I(r) = |I(r)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |b_0|^2 = |b_0|^2.$$

On a donc, pour $0 < r < 1 - |z_0|$,

$$|b_0|^2 + r^2|b_1|^2 + \ldots + r^{2n}|b_n|^2 \leq |b_0|^2$$

ce qui impose que $b_k = 0$ pour $k \geq 1$ donc que le polynôme P est constant ce qui est contradictoire.

Planche n° 2 (sup)

THÈME : ARITHMÉTIQUE

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note d_n le nombre de diviseurs de n. On pose

$$D_n = d_1 + \ldots + d_n.$$

1. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ où

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ divise } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

   Exprimer la somme $a_{i,1} + a_{i,2} + \ldots + a_{i,n}$ en fonction de n, i et la partie entière.

2. Montrer que

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \overset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

3. Montrer que $D_n \overset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

Réponse :

1. La matrice A est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   La somme des coefficients sur la ligne n° i est égale au nombre de multiples de i non nuls et inférieurs ou égaux à n :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \text{card}\{j \in [\![1,n]\!] \mid j \text{ est un multiple de } i\}.$$

   $j \in [\![1,n]\!]$ est un multiple de i s'il existe un entier k tel que $j = ki$. Or

$$1 \leq j \leq n \iff 1 \leq ki \leq n \iff 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor.$$

   On en déduit que

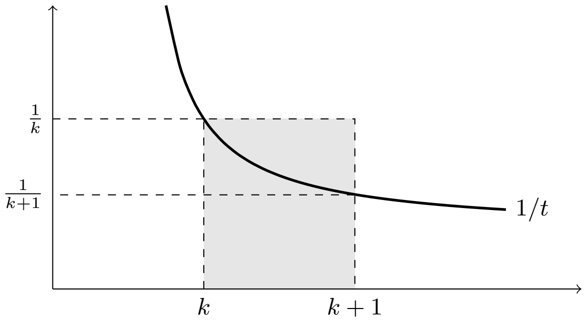
$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor.$$

2. Effectuons une comparaison série-intégrale. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[1, \infty[$. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout k dans $[\![1, n-1]\!]$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}.$$



Par somme et la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Notons $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ la somme partielle de rang n de la série harmonique. On a :

$$H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}.$$

On en tire un encadrement de H_n :

$$\frac{1}{n} + \ln(n) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

On en déduit que $H_n \overset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$.

3. On reprend la matrice A de la question 1.

Sur la colonne n° j de cette matrice, $a_{i,j}$ vaut 1 lorsque i est un diviseur de j. Ainsi, la somme $a_{1,j} + a_{2,j} + \ldots + a_{n,j}$ est égale aux nombres de diviseurs de j. Autrement dit :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = d_j.$$

Il s'ensuit que

$$D_n = \sum_{j=1}^{n} d_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor.$$

Encadrons D_n. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{n}{i} - 1 \leq \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \leq \frac{n}{i}.$$

Par somme :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{i} - 1 \right) \leq D_n \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i}$$

soit

$$nH_n - n \leq D_n \leq nH_n.$$

Comme $H_n \overset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$,

$$D_n \overset{n\to\infty}{\sim} n\ln(n).$$

Commentaires

Le programme suivant calcule D_n et trace les courbes $n \mapsto D_n$ et $n \mapsto n\ln(n)$.
La commande $a\%b$ donne le reste de la division euclidienne de a par b.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def nombreDiviseur(n):
    s=0
    for i in range(1,n+1):
        if n%i==0:
            s=s+1
    return s

D=0
listeD=[]
equivalent=[]
nMax=1000
for n in range(1,nMax):
    D=D+nombreDiviseur(n)
    listeD=listeD+[D]
    equivalent=equivalent+[n*np.log(n)]

plt.plot(listeD,color='k',linewidth=2,label="D(n)")
plt.plot(equivalent,"--",color='k',linewidth=2,
label="equivalent")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Pour $n \in [\![1, 1000]\!]$, on obtient :

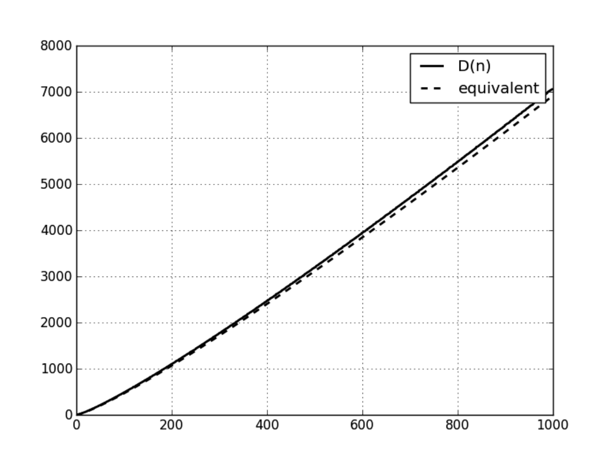


Planche n° 3

THÈME : POLYNÔME COMPLEXE

Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $P(X^2) = P(X)^2$.

Réponse :

- On constate que les monômes X^n vérifie l'équation.
- Montrons que les monômes sont les seules solutions de cette équation.
  Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$.
  $$P(X) = \ldots + a_n X^n$$
  avec $a_n \neq 0$ le coefficient dominant de P, $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de P et les pointillés désignant des monômes de degré $< n$.
  Supposons qu'il existe des monômes avant le monôme de plus haut degré. On note $a_m X^m$ le monôme qui précède le monôme de plus haut degré :
  $$P(X) = \ldots + a_m X^m + a_n X^n.$$
  On a alors
  $$P(X^2) = \ldots + a_m X^{2m} + a_n X^{2n}$$
  et
  $$P(X)^2 = \ldots + a_m^2 X^{2m} + 2a_n a_m X^{n+m} + a_n^2 X^{2n}.$$
  On en déduit que $a_n = a_n^2$ soit $a_n = 1$. Comme $2m < n + m < 2n$ car $m < n$ et qu'il n'y a pas de monôme de degré $n + m$ dans $P(X^2)$, $a_m = 0$. Donc le monôme $a_m X^m$ n'existe pas. Autrement dit, $P = X^n$.

Les solutions de l'équation sont tous les monômes unitaires.