Chapitre 1

Modélisation des signaux

Ce chapitre s'intéresse plus particulièrement aux signaux discrets qui sont l'objet de l'ouvrage. Toutes les notions et outils concernant les signaux continus sont présumés acquis et ne feront l'objet d'aucun rappel fondamental.

1.1 GÉNÉRALITÉS

1.1.1 Notion de signal

Un signal est une grandeur physique accessible à la mesure. En général, un signal dépend des coordonnées d'espace $\{x, y, z, t\}$: l'endroit où il se situe et le temps. On attribue à un signal des propriétés élémentaires comme l'intensité, la puissance, l'énergie...

Ce sont ces grandeurs auxquelles sont sensibles les capteurs qui constituent l'instrument de mesure du signal. Un capteur mesure l'un des aspects du signal par exemple :

- Signal électrique : intensité (ampères), tension (volts), puissance (watts) ;
- signal thermique : intensité ($°C$, Kelvin), énergie (calorie ou joule) ;
- signal lumineux : intensité (lumen), puissance (watts), énergie (joules) ;
- mélange chimique : concentration (mol/l), acidité (pH), taux de calcaire (tH) ;
- signal magnétique (tesla) ;
- signal barométrique (hectopascal) ;
- sitesse d'un mobile ($m/s, rd/s$), accélération ;
- etc.

Bon nombre de capteurs sont aussi en général des transducteurs c'est-à-dire qu'ils transforment la grandeur physique étudiée en une autre grandeur physique éventuellement proportionnelle et plus aisée à traiter avec les outils modernes : le traitement numérique du signal manipule des signaux électriques tensions ou courants.

1.1.2 Classification des signaux

Les signaux sont classables selon des grands groupes de propriétés :
- Signaux continus ou discrets ;
- signaux périodiques ou non ;
- signaux déterministes ou aléatoires.

1.1.3 Systèmes, filtres

Les signaux sont traités par des systèmes ou filtres dont le but est de les modifier pour leur conférer certaines propriétés ou d'en extraire des informations. De même que les signaux, les systèmes se classent en grandes catégories : continus ou discrets. Dans l'une et l'autre de ces catégories le cas particulier des systèmes linéaires invariants par translation (SLI, LTI) est particulièrement intéressant car nous disposons pour l'étude de ceux-ci d'outils mathématiques performants tout en restant d'approche relativement aisée.
- Fonctions, distributions ;
- convolution, corrélation ;
- transformée de Fourier ;
- analyse symbolique : transformée de Laplace, transformée en Z.

1.2 MODÉLISATION DES SIGNAUX

Afin de pouvoir prévoir des comportements ou de concevoir des appareils susceptibles de modifier, d'analyser les signaux, il est intéressant de les modéliser grâce à des outils mathématiques les plus puissants possibles. La modélisation du signal peut se faire grâce à des fonctions mathématiques plus ou moins compliquées décrivant la manière dont le signal évolue dans l'espace et le temps $s(x, y, z, t)$. Pour l'étude d'un signal en un point de l'espace la fonction sera uniquement dépendante du temps : $s(t)$. Si le signal est une image statique formée par exemple sur une barrette CCD, la fonction devient $s(x)$, s'il s'agit d'une image statique : $s(x, y)$, d'une image à 3 dimensions (hologramme,...) : $s(x, y, z)$ et si ces images sont animées nous retrouvons soit $s(x, t)$; soit $s(x, y, t)$; soit $s(x, y, z, t)$.

L'étude du signal de manière élémentaire se fait sur des fonctions d'une seule variable $s(t)$ ou $s(x)$. La généralisation à plusieurs dimensions utilise les mêmes concepts, seule est ajoutée un peu de complexité.

Lors de l'étude des signaux continus deux approches sont menées :

1. Une approche temporelle (ou dépendant de la variable d'espace) utilisant essentiellement les fonctions.
2. Une approche fréquentielle ou analyse spectrale basée sur l'utilisation de la transformée de Fourier que nous noterons par la suite TF : $TF[x(t)] = X(f)$.

Le but de ce sous-chapitre est de poser les bases de la modélisation des signaux discrets. Comme en continu nous retrouverons deux modes de modélisation : temporelle et fréquentielle liées par la transformée de Fourier (TF) qui sera reprécisée.

1.2.1 Signaux continus, discrets, échantillonnés

Signal continu

Un signal continu est défini à chaque instant t sauf en un nombre de points de mesure nulle (discontinuités de première espèce). Les signaux élémentaires ont déjà été largement étudiés :
- L'échelon d'Heaviside : $e(t)$;
- exponentielle causale : $e^{-\alpha t}e(t)$;
- rampe $t\ e(t)$;
- $\cos(\omega t + \phi)$;
- $e^{j2\pi ft}$;
- $\ldots$

Signal discret

Un signal discret $x_d(t)$ n'est défini qu'à certains instants t_k soit un tableau de valeurs numériques $\{x(t = t_k)\}$. Le cas le plus simple et le plus important est celui où : $(t_{k+1} - t_k) = cste = T_s\ \forall k$. Le signal est alors connu par sa série de valeurs contenues dans un tableau $\{x(kT_s)\}$ noté en raccourci $\{x_k\}$. La représentation d'un signal discret par un tableau de valeurs $\{xk\}$ n'est pas vraiment satisfaisante car un tableau n'est pas un objet mathématique aisé à manipuler tel quel en comparaison avec les fonctions. La représentation graphique liée à ce modèle (modèle physique) est celle de la figure 1.1.

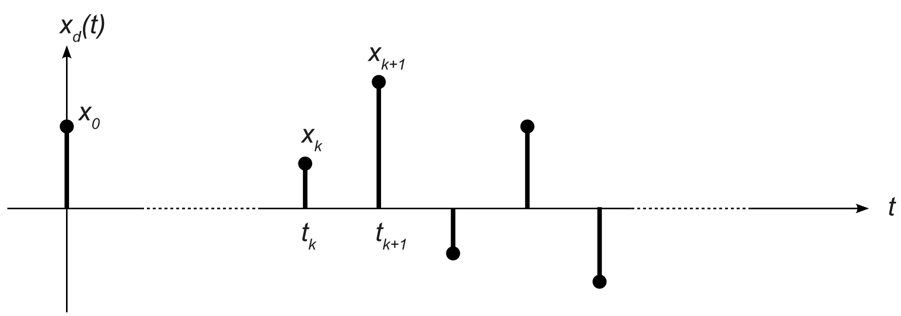

FIGURE 1.1 – Représentation d'un signal discret avec $t_{k+1} - t_k = cste$

Nous verrons par la suite comment lui associer un modèle mathématique plus intéressant à manipuler.

Signal échantillonné

Un signal échantillonné $x_e(t)$ est un signal discret dont les valeurs x_k sont prélevées (mesurées) sur un signal continu $x_c(t)$. La figure 1.2 représente un tel signal.

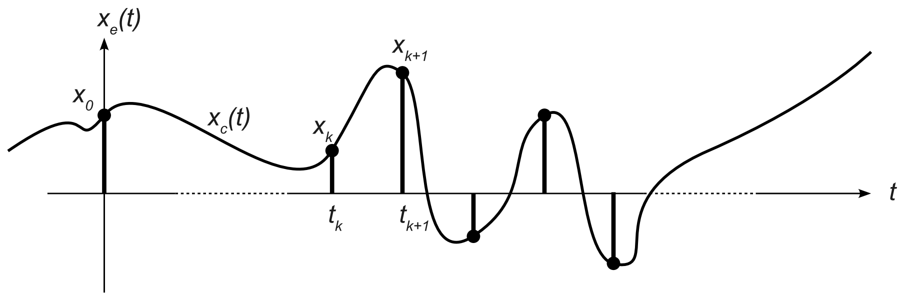

FIGURE 1.2 – Représentation d'un signal échantillonné avec $t_{k+1} - t_k = cste$

Un signal échantillonné est un cas particulier des signaux discrets, la propriété supplémentaire étant que nous connaissons un signal continu sur lequel sont prélevés les échantillons.

Signal numérique

Les signaux physiques sont transformés en signaux discrets par échantillonnage. Ensuite, pour traiter ces signaux, nous utilisons des machines : microprocesseurs, processeurs dédiés au traitement du signal (DSP : Digital Signal Processor), ordinateurs, etc... Tous ces systèmes comportent une partie acquisition du signal à base de convertisseurs analogique-numérique (CAN, ADC) et de convertisseurs numérique-analogique (CNA, DAC). Comme l'indique le nom de ces composants, le signal continu (analogique) est numérisé (digitalisé) ce qui recouvre deux opérations :

1. Une discrétisation par échantillonnage à une période T_s.
2. Une numérisation : la valeur de l'échantillon devant être traitée par des composants travaillant en binaire, elle est codée, soit en virgule fixe, soit en virgule flottante, sur un nombre fini de bits. Ce type de codage comporte une perte de précision par arrondi des données. C'est le problème de la quantification liée à la numération binaire à nombre fini de bits.

Le traitement du signal se fait alors sur ces données numérisées et il y a deux aspects dans ce traitement :

1. Un aspect traitement discret où un signal d'entrée discret est modifié pour fournir un signal de sortie discret. C'est l'aspect essentiel des algorithmes de traitement du signal et l'objet de tous les chapitres de ce livre.

2. Un aspect numérisation : la numérisation introduit dans les calculs un effet d'arrondi ce qui génère des imperfections de fonctionnement qui peuvent être parfois préjudiciables. Les algorithmes peuvent être implantés de plusieurs façons, toutes équivalentes d'un point de vue théorique, mais elles sont plus ou moins sensibles aux erreurs commises par quantification et cela justifie le choix d'une structure par rapport à une autre. Cet aspect sera évoqué en annexe D.

Traitement numérique du signal = *traitement discret* + *numérisation.*

1.2.2 Modèles mathématiques et distributions

Les *signaux continus* se modélisent aisément grâce aux fonctions et leur analyse est effectuée avec les outils associés : intégration, dérivation, équations différentielles.

Comme nous l'avons mentionné, un *signal discret* n'est connu que par un tableau de valeurs et nous disposons de peu d'outils mathématiques : pas d'intégration, de dérivation,... Pour palier à l'insuffisance de ce type de modélisation et pouvoir manipuler les signaux discrets de manière analytique il est intéressant d'utiliser la théorie des distributions de Laurent Schwartz (1915-2002). Cette même théorie permet de modéliser de manière élégante les *signaux périodiques*. Rappelons que c'est aussi la seule approche satisfaisante pour l'étude de la dérivation généralisée dans le cas des signaux continus ayant des discontinuités de première espèce.

Il n'est pas nécessaire de reprendre les détails de cette théorie développée dans les cours de mathématiques mais simplement de se rappeler les quelques résultats élémentaires qui nous intéressent dans le cas des deux signaux fondamentaux qui seront utilisés :

- La distribution $\delta(t)$ ou distribution de Dirac ;
- le peigne de Dirac.

La distribution de Dirac $\delta(\mathbf{t})$

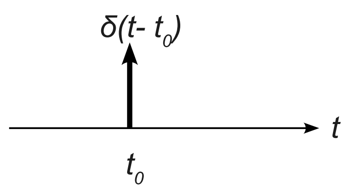

FIGURE 1.3 – Schématisation de la distribution de Dirac $\delta(t - t_0)$

Schématisée comme l'indique la figure 1.3, ses propriétés essentielles sont rappelées dans le tableau 1.1. Elles ne sont bien évidemment pas spécifiques à la coordonnée temps et sont utilisables pour toute autre variable par exemple dans le domaine fréquentiel : $y(f) \otimes \delta(f - f_0) = y(f - f_0)$.

1. parité	$\delta(-t) = \delta(t)$
2. facteur d'échelle	$\delta(at) = \frac{1}{\|a\|}\ \delta(t)$ avec $a \in \mathbb{R}$
3. produit d'une fonction, distribution régulière, par la distribution de Dirac	$x(t)\ \delta(t - t_0) = x(t_0)\ \delta(t - t_0)$
4. non existence du produit de deux distributions de Dirac	$\delta(t - t_1).\delta(t - t_2)$ n'a pas de sens.
5. produit de convolution de deux distributions	$\delta(t - t_1) \otimes \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2)$
6. produit de convolution d'une fonction par $\delta(t)$	$x(t) \otimes \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$
7. transformée de Fourier	$TF[\delta(t)] = 1$

TABLE 1.1 – Propriétés de la distribution de Dirac $\delta(t)$

L'opération translation

Aisée à modéliser avec l'aide de la distribution de Dirac, c'est la 6^{eme} ligne du tableau de propriétés :

$$\boxed{x(t) \otimes \delta(t - t_0) = x(t - t_0)} \tag{1.1}$$

$$\boxed{X(f) \otimes \delta(f - f_0) = X(f - f_0)} \tag{1.2}$$

(a). La relation (1.1) représente une translation de t_0 dans le domaine temporel.

(b). La relation (1.2) représente une translation de f_0 dans le domaine fréquentiel.

Avec le cas particulier d'une translation nulle :

$$\begin{aligned} x(t) \otimes \delta(t) &\equiv x(t) \\ X(f) \otimes \delta(f) &\equiv X(f) \end{aligned}$$

Ce résultat peut s'énoncer de façon succincte :

Translater = convoluer par la distribution de Dirac.

L'opération discrétisation

Moins directe que la définition de la translation une justification en est fournie dans le paragraphe suivant.

Définissons deux modèles mathématiques fondamentaux dans le traitement des signaux discrets ou échantillonnés :

1. Modèle mathématique de l'échantillonnage à un instant t_k d'un signal continu $x_c(t)$:

$$\boxed{x_e(t_k) = x_c(t).\delta(t - t_k) = x_c(t_k).\delta(t - t_k)} \quad (1.3)$$

2. Plus généralement, le modèle mathématique associé à un échantillon discret :

$$\boxed{x_e(t_k) = x_k.\delta(t - t_k)} \quad (1.4)$$

la valeur de la mesure de l'échantillon étant x_k.

Ces définitions s'appliquent bien entendu dans tout espace mathématique entre autres celui des fréquences où l'on peut parler d'échantillon spectral et de discrétisation spectrale [1] (ou fréquentielle) :

$$X(f_k).\delta(f - f_k) = X_k.\delta(f - f_k) = X(f).\delta(f - f_k)$$

Nous pouvons formuler l'échantillonnage comme :

Échantillonner = multiplier par la distribution de Dirac.

Une justification pratique

Ces définitions théoriques peuvent trouver une justification expérimentale. Prélever un échantillon est réalisé par un circuit électronique élémentaire de type échantillonneur-bloqueur [2] présent dans tous les systèmes de discrétisation comme les convertisseurs analogiques-numériques. Son action est schématisée sur la figure 1.4.

1. Cette notion sera précisée dans l'analyse spectrale.
2. SHA = sample and hold amplifier.

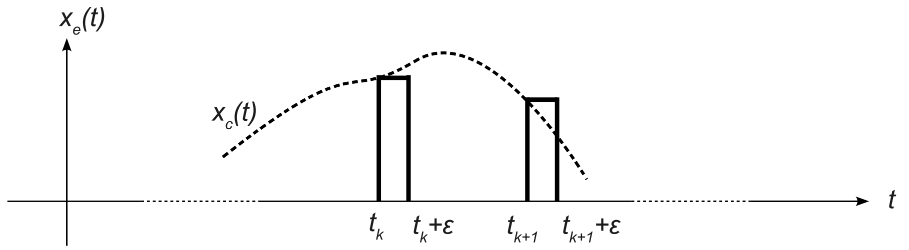

FIGURE 1.4 – Echantillonnage physique d'un signal (cas $t_{k+1} - t_k = cste$)

Le signal est bloqué pendant un temps bref ϵ fournissant le temps au convertisseur de réaliser la conversion sur un signal constant. Le signal obtenu est ainsi modélisable par une fonction rectangle $rect(t)$ ou, plus commode, une fonction porte $P(t)$.

$$rect\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \triangleq \begin{cases} 1 \text{ si } t \in]-\epsilon/2\ ;\ \epsilon/2[\\ 0 \text{ si } t \notin [-\epsilon/2\ ;\ \epsilon/2] \end{cases} \qquad P\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \triangleq \begin{cases} 1 \text{ si } t \in]0\ ;\ \epsilon[\\ 0 \text{ si } t \notin [0;\epsilon] \end{cases}$$

Ce qui permet de représenter le signal constituant l'échantillon par :

$$x_c(t_k).P\left(\frac{t-t_k}{\epsilon}\right) = \begin{cases} x_c(t_k) \text{ si } t \in]t_k\ ;\ t_k+\epsilon[\\ 0 \text{ si } t \notin [t_k\ ;\ t_k+\epsilon] \end{cases}$$

En utilisant la propriété (1.1) nous pouvons écrire :

$$x_c(t_k).P\left(\frac{t-t_k}{\epsilon}\right) = x_c(t_k).P\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \otimes \delta(t-t_k) = P\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \otimes x_c(t_k).\delta(t-t_k)$$

La fonction $P(\frac{t}{\epsilon})$ est une fonction instrumentale qui correspond à une imperfection : l'instrument nécessite un temps bref ϵ pour réaliser sa conversion mais la valeur mesurée et numérisée stockée en mémoire est bien $x_c(t_k)$. L'opération peut se schématiser selon le schéma de la figure 1.5 faisant apparaître un échantillonneur idéal.

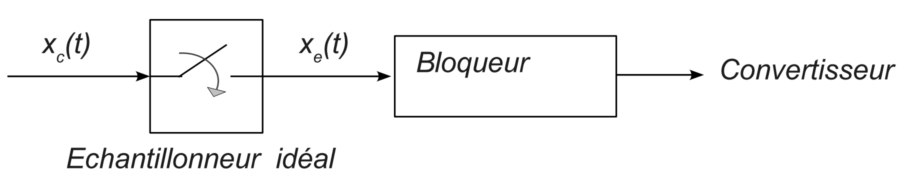

FIGURE 1.5 – Décomposition de l'échantillonnage