Chapitre 1
Notions de probabilité

1.1 Introduction

En statistique descriptive, on traite des collections de données et on les décrit de diverses manières, par la moyenne, le mode… La théorie des probabilités, elle, est directement une branche des mathématiques qui s'occupe des phénomènes aléatoires, qu'ils soient naturels ou artificiels. À titre d'exemple d'un tel phénomène, considérons le sexe des nouveaux nés dans une maternité de Nancy le 1^e^ avril. (Bien entendu, il ne peut y avoir que des garçons (*G*) ou des filles (*F*).) Supposons aussi que les naissances soient enregistrées dans l'ordre de leur survenance. On obtient alors une séquence de la forme suivante :

G F G G F G F F F G G …

Cette séquence ne comporte pas de régularité apparente. De surcroît, on ne sait quel sera le sexe du prochain nouveau-né. Tout ce que l'on peut dire, c'est que ce sera un garçon ou une fille. Par contre, sur le long terme, on peut affirmer que la proportion de filles (ou de garçons) dans cette séquence est approximativement de ½. Un autre exemple de phénomène aléatoire (artificiel cette fois) est fourni par le lancer à n reprises d'un dé à 6 faces supposé non pipé. Dès le premier lancer, il n'est pas possible de savoir quel résultat on obtiendra. Par contre, sur l'ensemble des n essais, le nombre de fois où un 6, un 5, etc., pourra être observé sera approximativement de 1/6.

La théorie des probabilités étudie de tels phénomènes aléatoires – appelés à présent **expériences aléatoires** – qui présentent une double particularité :

- d'une part, l'imprévisibilité des résultats de l'expérience ;
- d'autre part, une régularité de long terme.

Mais comme toute théorie, elle le fait en utilisant un modèle, en l'occurrence le **modèle d'une expérience aléatoire**. Les ingrédients d'un tel modèle sont au nombre de trois :

1. l'identification de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire ;
2. la spécification de tous les événements auxquels on s'intéresse ;
3. l'attribution de probabilités à ces événements.

De la sorte, le modèle d'une expérience aléatoire peut se représenter par un triplet constitué de l'ensemble des résultats possibles, de l'ensemble des événements et d'une mesure de la probabilité de ces événements.

Bien évidemment, des termes comme événements ou mesure de probabilité ne sont pas définis à ce stade, mais l'insistance sur la notion d'ensemble devrait conduire l'étudiant à soupçonner que ces définitions sont liées à la théorie mathématique des ensembles. C'est ce que l'on va voir maintenant dans le détail.

1.2 Des ensembles aux probabilités

1.2.1 Une expérience aléatoire

Soit l'expérience aléatoire qui consiste à jeter un dé (non pipé) à six faces et à observer le résultat obtenu. Les **résultats possibles**, appelés également **éventualités** ou **événements élémentaires**, sont au nombre de six. Ces six éventualités constituent un ensemble (au sens mathématique), nommé **univers des résultats** et noté Ω. On peut représenter l'univers Ω par un diagramme comportant six éléments, notés $\omega_i = \{i\}$, avec $i = 1, 2, \cdots, 6$.

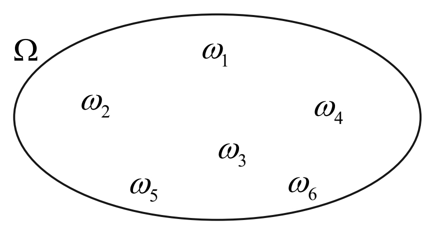


Figure 1.1

Mathématiquement, l'univers des résultats est défini en extension par

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

Bien entendu, on peut immédiatement dire que ω_4 appartient à Ω, ce qui est noté formellement $\omega_4 \in \Omega$, alors que ω_7 par exemple ne lui appartient pas, i.e. $\omega_7 \notin \Omega$. Toutefois, on n'est pas tenu de se limiter à la seule considération des résultats (ou événements élémentaires) de cette expérience aléatoire. Ainsi, on peut s'intéresser à une éventualité plus complexe telle, par exemple, l'obtention d'un nombre pair. En termes mathématiques, cela signifie que l'on s'intéresse à l'ensemble $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ qui constitue en fait une partie ou sous-ensemble de l'univers des résultats Ω, ce que l'on note :

$$\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega.$$

Ce sous-ensemble de Ω est appelé **événement** lié à l'expérience aléatoire examinée. Il existe évidemment bien d'autres événements tels l'obtention d'un nombre impair, ou d'un nombre entier compris entre 1 et 6, c'est-à-dire l'univers tout entier, etc.

L'étape suivante consiste à mesurer ces événements, c'est-à-dire les sous-ensembles de Ω. Puisqu'on a supposé que le dé était non pipé, tous les résultats sont également possibles et en conséquence, on peut attribuer à chacun d'eux la même probabilité 1/6. Par extension, la probabilité de l'événement complexe « obtention d'un chiffre pair » est égale à la somme des probabilités de chacun des résultats pairs élémentaires, donc à 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2. Ce faisant, on a construit une fonction qui associe à chaque événement un nombre réel de l'intervalle $[0,1]$:

$$\begin{aligned}
&\{\omega_i\} \mapsto P(\{\omega_i\}) = 1/6, \quad i = 1, \cdots, 6 \\
&\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \mapsto P(\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}) = 1/2 \\
&\{\Omega\} \mapsto P(\{\Omega\}) = 1.
\end{aligned}$$

La **fonction** $P : \Omega \to [0,1]$, définie sur les événements, c'est-à-dire les sous-ensembles, de Ω et à valeurs dans $[0,1]$, est appelée **mesure de probabilité**. Les valeurs de cette fonction – i.e. 1/6, ½, etc. – sont dites être des **probabilités**.

Au total, le modèle de cette expérience aléatoire particulière est représenté par le triplet $(\Omega, \mathcal{A}_0, P)$, où Ω est l'univers des résultats, $\mathcal{A}_0$ une famille de sous-ensembles, i.e. d'événements, de Ω et P une mesure de probabilité.

1.2.2 Le modèle de Kolmogorov

On va à présent généraliser l'exemple précédent en considérant une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ dont les résultats possibles sont au nombre de n, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Ces résultats seront notés $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$.

1. Univers des résultats et événements

Définition 1.1. On appelle **univers des résultats** associé à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$ l'ensemble, noté Ω, de tous les résultats possibles de $\mathcal{E}$:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}.$$

On a supposé que l'univers Ω était fini. Mais, dans la réalité, il n'en est pas forcément ainsi, dans la mesure où il peut être tout aussi bien infini dénombrable qu'infini continu.

Exemple 1.1

Soit l'expérience consistant à lancer une pièce de monnaie et à répéter ce geste jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois le côté face. L'ensemble Ω est constitué du nombre de lancers nécessaires pour obtenir ce résultat particulier. On ne peut cependant exclure que le côté pile apparaisse indéfiniment. En conséquence, Ω est l'ensemble infini dénombrable des entiers positifs

$$\Omega = \{1, 2, \cdots, n, n+1, \cdots\}.$$

Exemple 1.2

Considérons l'expérience aléatoire (parisienne) qui consiste à se rendre de la porte d'Orléans à la porte de Clignancourt en empruntant le périphérique. Le résultat associé à cette expérience – c'en est vraiment une ! – est le temps de trajet, qui est aléatoire, car il dépend des conditions de la circulation. Supposons qu'il varie entre 30 et 150 minutes, alors :

$$\Omega = [30, 150],$$

qui est un ensemble infini-continu.

Définition 1.2. Un **événement** est un **sous-ensemble** de l'univers des résultats Ω. Il est constitué d'un ou plusieurs résultats possibles. Pour tout $\omega_i \in \Omega$, le singleton $\{\omega_i\}$ est un événement appelé **événement élémentaire**. L'univers Ω est l'événement dit **certain** et $\varnothing$, l'ensemble vide, l'événement dit **impossible**.

Exemple 1.3

On lance une pièce de monnaie et on s'intéresse au résultat obtenu qui peut évidemment être pile (P) ou face (F). L'univers des résultats lié à cette expérience aléatoire est :

$$\Omega = \{P, F\}.$$

Les événements élémentaires sont $\{P\}$ et $\{F\}$. Les autres événements sont l'événement impossible $\varnothing$ (la pièce retombe par exemple sur sa tranche) et l'événement certain Ω. Au total, il y a donc quatre événements.

Exemple 1.4

Considérons l'ensemble des familles de trois enfants, dont on tire l'une d'entre elles au hasard, et intéressons-nous au sexe de ces enfants. (On désignera un garçon par G et une fille par F.) L'univers des résultats est

$$\Omega = \{GGG, GGF, GFG, GFF, FGG, FGF, FFG, FFF\}.$$

Chacun de ces résultats constituent un événement élémentaire. L'événement A consistant en ce que la famille tirée ait eu deux filles est donné par

$$A = \{GFF, FFG, FGF\}.$$

Les événements B (un garçon au plus) et C (deux filles au moins) sont respectivement

$$B = \{GFF, FGF, FFG, FFF\}$$
$$C = \{GFF, FGF, FFG, FFF\}.$$

On voit que $B = C$. Il y a évidemment bien d'autres événements, parmi lesquels notamment $\varnothing$ et Ω.

D'une manière générale, les événements seront désignés par des lettres majuscules *A*, *B*, *C*, etc. Pour chacun d'entre eux, on a : $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $C \subset \Omega$, etc. Comme Ω est fini, l'ensemble de ses parties l'est également. Désignons par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de *toutes* les parties (ou sous-ensembles) de Ω, donc l'ensemble de tous ses événements, soit

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A \mid A \subset \Omega\}.$$

Précisons à nouveau que $\varnothing$ et Ω appartiennent à $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire constituent des événements.

Puisque l'univers Ω comporte les événements élémentaires $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$, le cardinal (c'est-à-dire le nombre d'éléments) de $\mathcal{P}(\Omega)$ est égal à 2^n.

Exemple 1.5

Supposons que $\Omega = \{a, b, c\}$. Dans ce cas, il y a $2^3 = 8$ événements, soit

$$\{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,b\},\ \{b,c\},\ \{a,c\},\ \varnothing,\ \Omega = \{a,b,c\}.$$

2. Opérations sur les événements

Il devrait maintenant être évident qu'il existe une parenté profonde entre théorie des ensembles et théorie des probabilités, puisqu'un événement n'est rien d'autre qu'un sous-ensemble de l'ensemble de référence, c'est-à-dire de l'univers des résultats d'une expérience aléatoire spécifique). À partir de cette constatation, il est naturel de transposer les principales opérations sur les ensembles aux événements. Ainsi en considérant deux événements *A* et *B* de l'univers des résultats Ω, on aura :

- La **réunion** des deux événements *A* et *B* est l'ensemble des événements élémentaires qui appartiennent à l'un au moins des événements *A*, *B* :

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}.$$

- L'**intersection** des deux événements *A* et *B* est l'ensemble des événements élémentaires qui appartiennent à *A* et à *B* :

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}.$$

- La **différence** des deux événements A et B est l'ensemble des événements élémentaires de A qui n'appartiennent pas à B :

$$A \setminus B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ et } \omega \notin B\}.$$

Disons également quelques mots de l'opération de complémentation. Si A est un événement de Ω, son **complémentaire**, noté A^c, est l'ensemble des événements élémentaires de Ω qui ne sont pas dans A :

$$A^c = \{\omega \mid \omega \in \Omega \text{ et } \omega \notin A\}.$$

Exemple 1.6

Soit l'expérience consistant à lancer un dé à six faces. Si A est l'événement « obtenir 1 ou 4 » et B l'événement « obtenir 1 ou 2 ou 5 », alors l'événement $C = A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$.

Exemple 1.7

Soit toujours le lancer d'un dé, avec $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A est l'événement « obtenir un chiffre pair » et B l'événement « obtenir 2, 3, ou 6 ». Quels sont les événements $A \setminus B$, $C = A \cap B$ et A^c ?

$$A \setminus B = \{2,4,6\} \setminus \{2,3,6\} = \{4\}$$
$$C = A \cap B = \{2,6\}$$
$$A^c = \{1,3,5\} = \Omega \setminus A.$$

Les différentes opérations sur les événements présentent plusieurs propriétés, parmi lesquelles on retiendra :

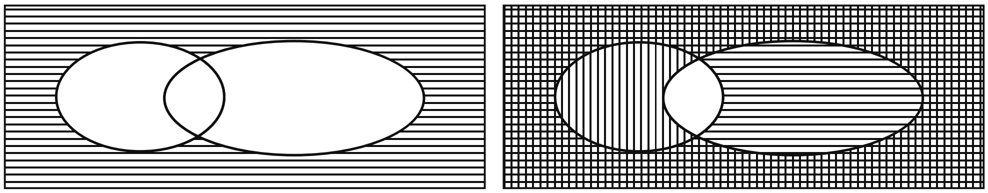
- la distributivité de la réunion et de l'intersection l'une par rapport à l'autre :

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

- les lois de De Morgan, qui lient les opérations de réunion, d'intersection et de complémentation :

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

On peut illustrer les différentes opérations, de même que leurs propriétés, par des diagrammes de Venn. On se contentera ici de le faire pour la première loi de De Morgan.



$(A \cup B)^c \quad = \quad A^c \cap B^c$

Figure 1.2

Les opérations sur les événements peuvent se généraliser en considérant non plus deux ou trois événements, mais *n* événements (*n* fini bien sûr). Ainsi, par exemple, la réunion et l'intersection d'une suite (finie) d'événements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ seront définies comme suit :

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \{\omega \mid \omega \in A_k \quad \text{pour au moins un } k\}$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \{\omega \mid \omega \in A_k \quad \text{pour tous les } k\}.$$

De la même façon, les propriétés des opérations se généralisent aisément :

- distributivité

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap B = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B)$$

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \cup B = \bigcap_{k=1}^{n} (A_k \cup B)$$

- Lois de De Morgan

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^c$$

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{n} A_k^c.$$