1 Concours AVENIR.

Aborder un concours n'est pas toujours chose aisée pour un lycéen, qui, par la philosophie même de l'enseignement pratiqué en France, ne connaît que l'évaluation des compétences acquises dans un cadre très normatif et normé. Il n'y a pas de surprises dans les épreuves du bac, il s'agit simplement de réciter ses gammes.
Un concours est par nature bien différent : il vise à sélectionner.
Pour autant, les rédacteurs d'épreuves de concours ne cherchent pas à piéger les candidats, mais ils élaborent des épreuves qui testent s'ils ont acquis une réelle maîtrise du programme. Ils proposent une batterie de questions dans lesquelles ce qui pourrait apparaître comme des pièges vise simplement à tester la qualité de lecture, l'attention, la compréhension des notions abordées. Ces questions sont rarement difficiles, mais chaque erreur est sanctionnée.
Le concours vise à classer les candidats.
Il faut donc simplement pour réussir être meilleur que « les autres », ou du moins une partie d'entre eux. Pour cela, pas d'autre ressource que de produire efficacement le meilleur de soi-même, avec la conviction qu'aborder ces épreuves sereinement et avec méthode sera le meilleur garant d'un résultat conforme à ses espoirs.

Les quelques conseils qui suivent ont pour objectif d'aider le lecteur à mieux s'organiser à cette fin.
Il est également vivement recommandé de lire attentivement tous les conseils de bon sens qui sont donnés sur le site du concours, qui est très bien fait, et de *lire les rapports des concours des années passées.*
La section 1.1 présente l'épreuve de mathématiques, la section 1.2 donne quelques rappels utiles en mathématiques, - des trucs pourrait-on dire - mais n'a pas l'ambition de remplacer un cours, il n'y en a pas la place ici, et enfin les sections 2 et 3 donnent un corrigé détaillé des épreuves de mai 2015, et mai 2016. en essayant de mettre l'accent sur les méthodes efficaces de résolution, et une bonne façon de l'aborder.
Quelques figures ont été insérées : elle ont été volontairement faites à la main d'une façon compatible avec les conditions du concours, afin de donner quelques exemples de ce qu'il est possible de faire.

1.1 Présentation de l'épreuve - comment l'aborder.

1.1.1 Le temps - les conditions matérielles.

L'épreuve dure 90 minutes, au cours desquelles il faut répondre au *maximum* à 45 questions parmi 60 proposées.
C'est un questionnaire à choix multiple dans lequel pour chaque question, quatre réponses sont proposées, parmi lesquelles une réponse est correcte et une seule.
Une bonne réponse rapporte 3 points, une mauvaise réponse en fait perdre un.
La calculatrice n'est pas autorisée, et il n'y a pas de brouillon : le seul papier disponible est celui de l'énoncé. Il faut s'en servir intelligemment : peu et efficacement.

Une différence importante avec les habitudes du lycée : pas de calculette : les calculs (simples en général) se font de tête ou à la main. D'ailleurs, ne pas hésiter à poser un calcul plutôt que de faire une faute : il n'est pas rentable de risquer de perdre 4 points pour gagner 15 secondes. Entraînez-vous à faire tous les calculs rapidement à la main. Servez-vous le moins possible de la calculatrice d'ici au concours !

L'épreuve de mathématiques du concours AVENIR est une épreuve très courte : 90 minutes pour 45 questions à traiter parmi 60 proposées, cela laisse 2 minutes par question... si l'on veut répondre à 45 d'entre elles !
Il ne faut pas cependant faire une fixation sur le nombre de questions traitées : 45 questions avec 10 fautes (seulement ...) rapportent 85 points. Alors que 30 questions sans fautes en rapportent 90 ! Il ne faut donc pas confondre rapidité et précipitation : faire les calculs nécessaires, ou la figure avec un peu de soin, est sans doute plus profitable que de se précipiter pour « traiter » 45 questions.
A cet égard, les informations données dans le rapport de math des deux années passées montrent que le nombre moyen de questions traitées par les candidats est assez stable, proche de 35, et que le nombre d'erreurs moyen est légèrement variable, mais très important : de 15 à 18 erreurs. C'est à dire que le « candidat moyen » lorsqu'il répond à une question a presque *une chance sur deux de se tromper* !
Il est donc clair qu'il est plus important pour être bien classé de travailler la qualité des réponses fournies que leur nombre. Les réflexes à avoir absolument :

- Vérifier chaque résultat avant de donner sa réponse définitive.

- Ne répondre que si l'on est sûr de soi.

Enfin, ne vous attardez pas sur les questions qui vous paraissent difficiles, et concentrez-vous sur celles qui vous paraissent les plus faciles, et traitez-les avec soin.

1.1.2 Des petits trucs pour aller plus vite.

1. La première remarque est qu'une figure est un moyen souvent plus rapide et moins générateur d'erreurs que le calcul. Faites donc des figures dès que possible :
   - Pour la géométrie avec les complexes, placer les points.
   - Pour les fonctions, tracer rapidement l'allure de la fonction, en utilisant ceux parmi les éléments suivants qui sont faciles à obtenir :
     - Ensemble de définition.
     - Limites.
     - Valeurs remarquables (valeur en 0, valeurs où la fonction s'annule...)
     - Sens de variation, s'il est simple à obtenir (penser à des composés de fonctions simples, des sommes de fonctions monotones, ou convexes, ou concaves...)
2. Pour les probabilités discrètes,
   - Faire un arbre.
   - Prendre des notations simples si besoin
3. Pour les variables aléatoires à densité, représenter l'allure de la densité.

1.2 Quelques rappels utiles

Le rapport des épreuves de mathématique des concours avenir 2015 et 2016 pointent un certain nombre de lacunes assez fréquentes, qui font l'objet des paragraphes suivants.

1.2.1 Sur les nombres complexes

Géométrie

Il est particulièrement important d'avoir bien compris l'interprétation géométrique des opérations avec les complexes :
L'addition d'un nombre complexe z_1 à un autre z_2 : le point d'affixe $z_1 + z_2$ est l'image du point d'affixe z_2 par la translation de vecteur z_1, et également l'image du point d'affixe z_1 par la translation de vecteur z_2 : c'est assez banal, mais après tout, le rappeler ne peut pas nuire.
Le produit de deux nombres complexes z_1 et z_2 non nuls :

- a pour argument la somme des arguments de z_1 et de z_2.
- a pour module le produit des modules de z_1 et de z_2.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, un vecteur $\overrightarrow{u}$ est associé au nombre complexe d'argument θ et de module ρ où θ est l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u})$ et ρ est la norme de $\overrightarrow{u}$.
Ce nombre complexe est appelé « affixe » du vecteur $\overrightarrow{u}$. Il est souvent noté $z_{\overrightarrow{u}}$.
On a $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$. Bien remarquer que l'on a toujours « final - initial ».
De ce fait, on peut traduire des propriétés sur des distances (ou des normes de vecteurs, ce qui revient au même) par des propriétés portant sur des modules, et des propriétés d'angles orientés par des propriétés portant sur des arguments.
Essentiellement, on a les relations à savoir retrouver immédiatement :

$$AB = |z_{\overrightarrow{AB}}| \text{ et } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

Caractérisation des réels et des imaginaires purs

Un nombre complexe z est réel si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- $z - \overline{z} = 0$

- $arg(z) = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\mathcal{I}m(z) = 0$

Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- $z + \overline{z} = 0$
- $arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\mathcal{R}e(z) = 0$

Ces caractérisations doivent toujours être présentes à l'esprit, et lorsqu'on cherche à s'en servir préférer les premières aux dernières dans l'ordre où elles sont présentées.

1.2.2 Géométrie analytique : position relative de droites et de plans

Un plan dont on connaît une équation cartésienne dans un repère orthonormé admet pour vecteur normal le vecteur dont les coordonnées sont les coefficients de x, y et z dans l'équation, à condition que les inconnues figurent toutes dans le même membre.
Dans l'équation paramétrique d'une droite, les coefficients du paramètre donnent les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite.
Il faut connaître les affirmations suivantes en les retrouvant rapidement car elles sont intuitives :

- Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
- Une droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à un vecteur normal du plan.
- Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est colinéaire à un vecteur normal du plan.
- Un vecteur directeur de l'intersection de deux plans sécants est orthogonal aux vecteurs normaux des deux plans.

1.2.3 Sens de variation d'une fonction

Deux petites précisions concernant la relation entre le signe de la dérivée d'une fonction et son sens de variation :

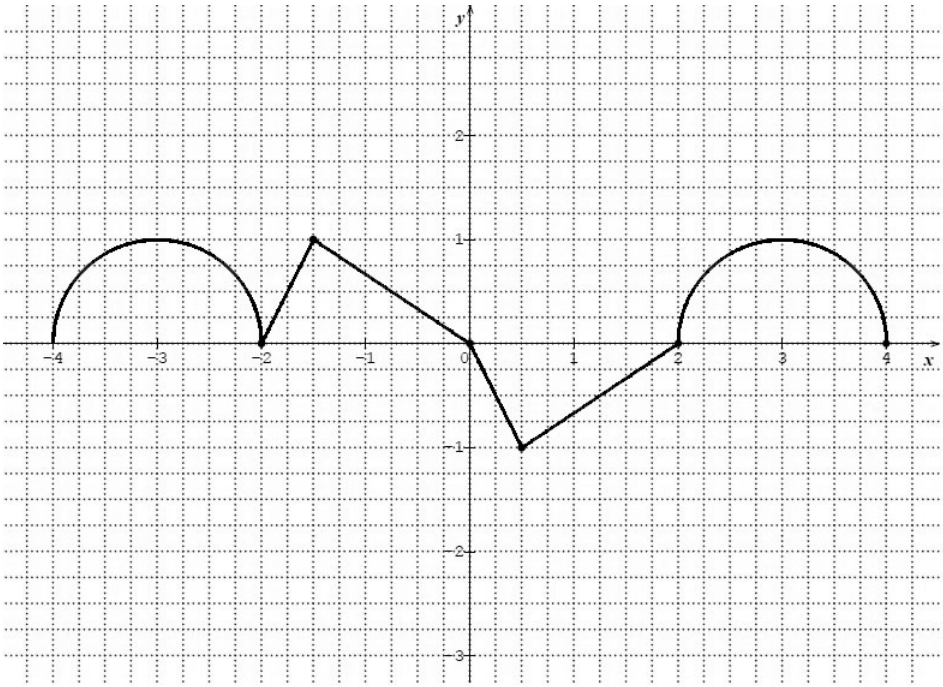
- Si une fonction dérivable sauf éventuellement en un nombre fini de points est continue sur son ensemble de définition, et sa dérivée est positive, alors elle est croissante sur chaque intervalle où elle est définie. (exemple : fonction racine carrée)

- Si une fonction est dérivable de dérivée strictement positive sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors elle est strictement croissante sur chaque intervalle où elle est définie. (exemples : fonction inverse, fonction cube).

2 Corrigé de l'épreuve de mathématiques 2015

INTERPRETATION GRAPHIQUE

Est représentée ci-dessous, dans un repère orthonormé, la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-4;4]$.



Question n° 1 ***La fonction*** f

a : est paire non impaire

b : est impaire non impaire

c : est paire et impaire

d : n'est ni paire ni impaire

Solution. Réponse d :
En effet, une fonction f définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ est paire (resp. impaire) si $\forall x \in D, \quad -x \in D$ (cette condition exprime que l'ensemble D est symétrique par rapport à 0, et assure que les expressions qui suivent ont un sens) et $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

On reconnaît les fonctions paires à ce que leur courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et les fonctions impaires symétrique par rapport à l'origine.
On voit facilement que la courbe de f ne présente ni l'une ni l'autre de ces symétries. En particulier on a $f(-0,5) \neq f(0,5)$ et $f(-0,5) \neq -f(0,5)$.

Question n° 2 *L'équation* $f(x) = 0$ *admet :*

a : 2 *solution.*

b : 3 *solution.*

c : 4 *solutions.*

d : 5 *solutions.*

Solution. Réponse d.
La figure qui était proposée ici est assez étonnante dans son graphisme car tous les points remarquables sont notés avec un point : aux abscisses -2 ; $-1,5$; 0 ; $0,5$ et 2 : un point anguleux, en -2 ; 0 ; 2 et 4 ils semblent aussi indiquer une intersection avec l'axe des abscisses : on peut donc légitimement hésiter pour affirmer qu'il y ait une intersection à l'abscisse -4, puisqu'il n'y a pas de point. On pourrait penser par exemple que la fonction f tend vers 10^{-10} à droite en -4. Un rapide coup d'œil à l'ensemble de définition nous indique que la fonction est bien définie en -4 : si cela n'avait pas été le cas, cela aurait expliqué l'absence de point à cette abscisse.
Le corrigé officiel indique que la réponse attendue est 5 solutions, et qu'il faut donc considérer que -4 est solution.
La morale de cette histoire est qu'il ne faut pas trop chercher la petite bête dans ces interprétations graphiques.
Ajoutons qu'il n'existe pas de conventions officielles en ce qui concerne ces représentations graphiques, et que si -4 ne devait pas être solution, il aurait fallu que cela se voie.
Cette question reste néanmoins critiquable.

Question n° 3 *L'équation* $f'(x) = 0$ *admet*

a : 2 *solution.*

b : 3 *solution.*

c : 4 *solutions.*

d : 5 *solutions.*