Chapitre 1

# Introduction

Dans ce chapitre, nous définissons quelques notions de base, en particulier nous précisons le vocabulaire de la théorie des ensembles qui sera utilisé par la suite. L'assimilation de ces notions est fondamentale en topologie mais aussi dans toutes les branches des mathématiques. Nous ne développerons pas une théorie très générale sur les ensembles et nous ne présenterons pas tous les axiomes de la théorie des ensembles. Cependant nous citerons l'axiome du choix et quelques-unes de ses conséquences.

## 1. Ensembles

Les ensembles sont des objets mathématiques simples avec très peu de propriétés. Dans les chapitres suivants nous munirons les ensembles de structures supplémentaires de manière à pouvoir construire de nouveaux objets d'étude.

Munis de ces nouvelles structures, les ensembles seront appelés *espaces métriques* ou plus généralement *espaces topologiques* et nous pourrons y étudier la convergence des *suites* et la *continuité des applications*.

Il est important de noter qu'il est aussi possible de munir les ensembles de multiples autres structures de manière à pouvoir y faire des calculs algébriques par exemple ; on parlerait alors de groupes, d'anneaux ou de corps.

### 1.1. Définitions.

Nous appelerons *ensemble* une collection d'objets, chaque objet est appelé *élément* ou *point* de cet ensemble. L'ensemble dans lequel il n'y a aucun élément est appelé *ensemble vide*, on le note $\varnothing$.

Les ensembles vont devoir vérifier des propriétés aussi, toutes les collections, ou familles d'objets, ne sont pas forcément des ensembles ; en particulier, la collection de tous les ensembles n'est pas un ensemble (cf. § 3 p.17).

Voici une première propriété vérifiée par les ensembles.

**Propriété 1.1.** *Deux ensembles sont égaux s'ils possèdent les mêmes éléments.*

On peut définir un ensemble en donnant la liste de tous ses éléments ou alors en donnant des propriétés caractéristiques de tous ses éléments ; de même, lorsque l'on dispose d'un ensemble, on peut en construire de nouveaux en considérant les éléments de cet ensemble qui satisfont certaines conditions.

**Exemples 1.2.**

(1) *La collection des trois entiers* $0, 1$ *et* $2$ *forme l'ensemble, noté* $\{0, 1, 2\}$, *à trois éléments.*

(2) *La collection de toutes les lettres de l'alphabet latin forme un ensemble à 26 éléments.*

(3) *Les entiers positifs ou nuls sont les éléments de l'ensemble* $\mathbb{N}$.

(4) *Les fonctions réelles continues définies sur l'intervalle* $[0, 1]$ *forment un ensemble noté* $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

(5) *Les matrices carrées à coefficients complexes de taille* $n$ *forment l'ensemble noté* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

**Définition 1.3.** *Le nombre des éléments d'un ensemble* $E$ *est appelé* cardinal *de* $E$ *et est noté* $\mathrm{card}(E)$, *dans le cas où il n'y a pas un nombre fini d'éléments dans* $E$ *le cardinal est dit* infini.

**Définition 1.4.** *On appelle* sous-ensemble *d'un ensemble* $E$ *tout ensemble* $F$ *dont tous les éléments appartiennent aussi à* $E$. *L'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble.*

*Lorsque* $A$ *est un sous-ensemble de* $B$ *on dit que* $A$ *est* inclus *dans* $B$, *on utilise alors la notation*

$$\boxed{A \subset B}$$

Pour montrer que $A \subset B$, i.e. $A$ est un sous-ensemble de $B$, il suffit de prouver que tous les éléments de $A$ sont des éléments de $B$. Bien entendu, si $A \subset B$ on peut avoir $A = B$.

**Propriété 1.5.** *À partir d'un ensemble* $E$, *on peut construire l'ensemble qui est constitué de tous ses sous-ensembles ; on l'appelle* ensemble des parties de $E$ *et on le note* $\mathcal{P}(E)$.

$$\boxed{\mathcal{P}(E) = \Big\{F \mid F \subset E\Big\}}$$

**Exemple 1.6.** *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *des nombres réels est un sous-ensemble de l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes.*

Les sous-ensembles d'un ensemble donné sont très souvent identifiés comme regroupant les éléments de l'ensemble qui vérifient une ou plusieurs propriétés.

**Exemples 1.7.**

(1) *Les fonctions de* $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ *qui sont dérivables forment un sous-ensemble de* $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$

(2) *Les matrices inversibles de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *forment un sous-ensemble noté* $\mathscr{Gl}_n(\mathbb{C})$ *qui peut aussi être défini de la manière suivante*

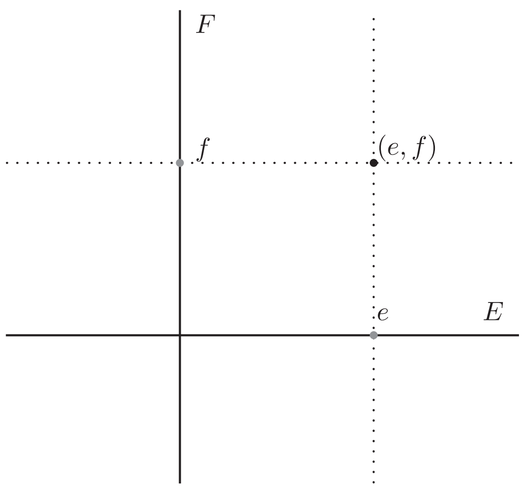
$$\mathscr{Gl}_n(\mathbb{C}) = \Big\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid \det(M) \neq 0 \Big\}.$$

À partir de plusieurs ensembles on peut en construire de nouveaux à l'aide des propriétés suivantes.

**Propriété 1.8.** *Étant donnés deux ensembles $E$ et $F$, le* produit cartésien *de $E$ et de $F$ est l'ensemble des couples $(x, y)$ où $x$ est élément de $E$ et $y$ est élément de $F$, on le note $E \times F$.*

$$\boxed{E \times F = \Big\{ (e, f) \mid e \in E,\ f \in F \Big\}}$$

Voici une représentation du produit cartésien de deux ensembles $E$ et $F$



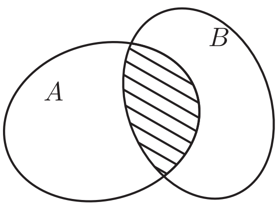

Les éléments du produit cartésien $E \times F$ sont représentés comme des couples d'éléments dont le premier est dans $E$ et le second dans $F$. Citons comme exemple le cas de $\mathbb{R}^2$ qui est constitué des couples de nombres réels.

**Propriété 1.9.** *L'*intersection *de deux ensembles $A$ et $B$ est l'ensemble constitué des éléments qui sont à la fois dans $A$ et dans $B$, on le note $A \cap B$.*

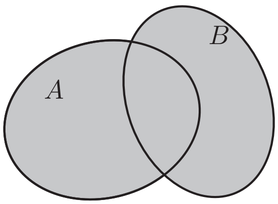
$$\boxed{A \cap B = \Big\{ x \mid x \in A \text{ et } x \in B \Big\}}$$

*La* réunion *de deux ensembles $A$ et $B$ est l'ensemble qui est constitué de tous les éléments de $A$ et de tous les éléments de $B$, on le note $A \cup B$.*

$$\boxed{A \cup B = \Big\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\Big\}}$$




En hachuré $A \cap B$, l'intersection de $A$ et de $B$.




En gris $A \cup B$, la réunion de $A$ et de $B$.

**Remarque 1.10.** *Les ensembles $A$ et $B$ sont des sous-ensembles de $A \cup B$. L'ensemble $A \cap B$ est un sous-ensemble de $A$ et un sous-ensemble de $B$. Ce qui se traduit par*

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B$$
$$A \cap B \subset B \subset A \cup B$$

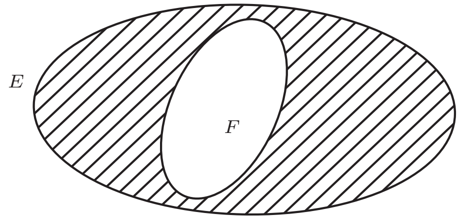
**Propriété 1.11.** *Soit $E$ un ensemble et soit $F$ un sous-ensemble de $E$. On appelle* complémentaire *de $F$ dans $E$ le sous-ensemble de $E$ formé des éléments de $E$ qui n'appartiennent pas à $F$ ; on le note $\complement_E F$ ou $E \setminus F$.*

Lorsque l'on considère un sous-ensemble constitué d'éléments qui satisfont certaines propriétés caractéristiques, alors le complémentaire sera constitué des éléments qui ne vérifient pas au moins une de ces propriétés caractéristiques.

Voici une autre façon de décrire le complémentaire d'un sous-ensemble

$$\boxed{\complement_E F = \Big\{e \in E \mid e \notin F\Big\} = E \setminus F}$$

Sur la figure suivante on a représenté $\complement_E F = E \setminus F$ en hachuré.




Pour tout sous-ensemble $F$ d'un ensemble $E$ nous avons la propriété suivante

$$\boxed{E = F \cup \complement_E F.}$$

**Remarque 1.12.** *Lorsque $A$ et $B$ sont des sous-ensembles d'un ensemble $F$, alors les notions d'intersection, de réunion et de complémentaire se traduisent de la manière suivante*

- *si $x$ est un point de l'ensemble $A \cup B$, alors $x$ est un point de $A$ ou un point de $B$,*
- *si $x$ est un point de l'ensemble $A \cap B$, alors $x$ est un point de $A$ et un point de $B$,*
- *si $x$ est un point de l'ensemble $\complement_E A$, alors $x$ est un point de $E$ qui n'est pas un point de $A$,*

*On constate que si $A$ et $B$ sont définis comme des ensembles regroupant des éléments ayant respectivement la propriété caractéristique $P_1$ et la propriété caractéristique $P_2$, alors l'ensemble $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui possèdent les deux propriétés caractéristiques $P_1$ et $P_2$. De même $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui possèdent l'une ou l'autre des deux propriétés caractéristiques $P_1$ et $P_2$. C'est pourquoi la notion d'intersection est à rapprocher d'un « et » logique et la notion d'union est à rapprocher d'un « ou » logique.*

*Par exemple, si $A$ est l'ensemble des voitures qui sont de couleur rouge et si $B$ est l'ensemble des voitures qui sont électriques, alors $A \cap B$ est contitué des voitures électriques rouges et $A \cup B$ est constitué des voitures qui sont de couleur rouge ou sont électriques (elles peuvent être à la fois rouges et électriques).*

## 2. Applications entre ensembles

De manière à pouvoir comparer des ensembles il est très utile de pouvoir établir des correspondances entre les éléments de deux ensembles. Par exemple cela peut permettre de comparer les cardinaux de deux ensembles.

**Définition 1.13.** *Soient $E$ et $F$ deux ensembles on appelle* application *de $E$ dans $F$ toute correspondance entre les éléments de $E$ et des éléments de $F$ qui à chaque élément de $E$ associe un unique élément de $F$.*

*On utilisera la notation suivante pour une application $f$*

$$f : E \to F.$$

*On appelle $E$* ensemble de départ *et $F$* ensemble d'arrivée.

*Si $x$ est un élément de $E$, on appelle* image *de $x$ par $f$ l'élément $f(x)$ de $F$.*

*Si $y$ est un élément de $F$, alors s'il existe un élément $x$ de $E$ tel que $y = f(x)$ cet élément $x$ est appelé* antécédent *de $y$ par l'application $f$.*

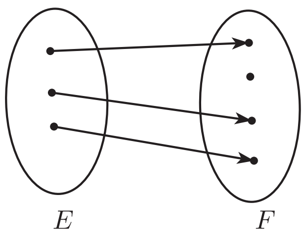
*L'ensemble $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$ est appelé* image *de $f$.*

*On dit que $f$ est* surjective *si tout élément de $F$ admet au moins un antécédent.*

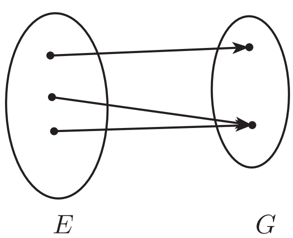
*On dit que $f$ est* injective *si tout élément de $F$ admet au plus un antécédent.*

*On dit que $f$ est* bijective *si elle est injective et surjective.*

Donnons des représentations graphiques très simples de ces notions.




*Une application injective, mais non surjective, entre un ensemble $E$ à trois éléments et un ensemble $F$ à quatre éléments.*




*Une application surjective, mais non injective, entre un ensemble $E$ à trois éléments et un ensemble $G$ à deux éléments.*

**Remarque 1.14.** *Certains éléments de l'ensemble d'arrivée d'une application n'ont pas d'antécédent lorsque l'application n'est pas surjective. Lorsqu'une application n'est pas injective, il existe des éléments de son image qui ont plusieurs antécédents.*

*Dans le cas des injections, et donc des bijections, chaque élément de l'image, qui peut être égale à l'ensemble d'arrivée, est en correspondance avec un unique antécédent.*

**Exemples 1.15.**

(1) *Soit $f$ l'application suivante*
$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=x^2. \end{array}$$
*Il s'agit d'une application car tout réel $x$ possède une unique image qui est égale au carré de $x$. Par contre l'application $f$ n'est pas surjective puisque le réel $-1$ n'a pas d'antécédent, elle n'est pas injective non plus car $f(1)=f(-1)$.*

(2) *Soit $n \geq 2$ et soit $g$ l'application suivante*
$$\begin{array}{rcl} g:\mathscr{M}_n\big(\mathbb{R}\big) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & g(A)=\det(A). \end{array}$$
*Il s'agit d'une application car toute matrice réelle $A$ possède une unique image qui est égale à son déterminant. Par contre l'application $g$ est surjective puisque pour tout réel $\lambda$ la matrice diagonale suivante*
$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
*a pour image $g(A_\lambda)=\det(A_\lambda)=\lambda$ et elle n'est pas injective car toutes les matrices non inversibles ont pour image $0$.*

(3) *Fixons $\alpha$ et $\beta$ deux nombres réels, et soit $h$ l'application suivante*
$$\begin{array}{rcl} h:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & h\big((x,y)\big)=(x+\alpha,y+\beta). \end{array}$$
*Il s'agit d'une application bijective car tout élément $(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ possède une unique image par $h$ de plus tout élément $(x',y')$ de $\mathbb{R}^2$ possède un unique antécédent $(x'-\alpha,y'-\beta)$ par $h$ car $h\big((x'-\alpha,y'-\beta)\big)=(x',y')$.*

**Définition 1.16.** *Soit $f:E\to F$ une application entre deux ensembles $E$ et $F$. Si $A$ est un sous-ensemble de $E$, alors on peut définir l'application notée $f_{|A}$, appelée* restriction *de $f$ à $A$, suivante*
$$\begin{array}{rcl} f_{|A}:A & \to & F \\ x & \mapsto & f_{|A}(x)=f(x) \end{array}$$

**Propriété 1.17.** *Si $E$ et $F$ sont des ensembles alors on peut former l'ensemble*
$$\mathscr{A}(E,F)=\Big\{f:E\to F\Big\}$$

*des applications de $E$ dans $F$.*

Lorsqu'une application est injective alors le cardinal de l'ensemble d'arrivée est supérieur ou égal à celui de l'ensemble de départ. Par contre lorsqu'une application est surjective, c'est le cardinal de l'ensemble de départ qui est supérieur ou égal à celui de l'ensemble d'arrivée.

Par conséquent si une application est bijective alors les deux ensembles ont le même cardinal.

Lorsque cela a un sens, on peut composer les applications définies sur plusieurs ensembles. Plus précisément

**Définition 1.18.** *Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On appelle* composée *de $f$ et de $g$, l'application notée $g \circ f$ définie de la manière suivante*

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : E & \to & G \\ a & \mapsto & g\big(f(a)\big) \end{array}$$

*Il faut comprendre que lorsque l'on écrit $g \circ f$ on a affaire à une* **notation***.*

**Exemple 1.19.** *soit $f$ et $g$ les deux applications suivantes*

$$\begin{array}{rcl} f : (\mathbb{R}_+)^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \mapsto & f\big((x, y)\big) = x + y, \end{array}$$

*et*

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}_+ & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ z & \mapsto & g(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \sqrt{z} \end{pmatrix}. \end{array}$$

*Alors l'application $g \circ f$ est définie par*

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : (\mathbb{R}_+)^2 & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x, y) & \mapsto & g \circ f\big((x, y)\big) = \begin{pmatrix} x + y & 0 \\ 0 & \sqrt{x + y} \end{pmatrix}. \end{array}$$

**Définition 1.20.** *Si $f : E \to F$ est une bijection, alors on peut définir une autre application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. L'application $g$ est appelée* réciproque *de $f$, on la note souvent $f^{-1}$.*

**Définition 1.21.** *On dit qu'un ensemble $E$ est* dénombrable *s'il existe une bijection entre $E$ et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.*

**Définition 1.22.** *Deux ensembles $E$ et $F$ sont dits* équipotents *s'il existe une bijection entre $E$ et $F$.*

Un ensemble est donc dénombrable s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

*Nous verrons dans l'Exercice 8 qu'il existe des ensembles dont le cardinal est infini mais qui ne sont pas dénombrables.*