Eléments de logique, sommes et récurrences

(ou comment bien démarrer)

01

RÉPARTITION DES EXERCICES

I. ÉNONCÉS DES EXERCICES

1.01 Montrer que : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, \left||x|-|y|\right|\leqslant |x-y|$.

◇

1.02 Montrer que, a et b étant deux réels quelconques : $a\neq b \implies a^3+a\neq b^3+b$.

◇

1.03 Montrer que : $\forall\,x\in\mathbb{R}_+^*, x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$.

◇

1.04 Soit x un nombre réel.

1°) Montrer que : $10^{-4}<|x|<10^{-3} \implies \dfrac{1}{x}>10^3$ ou $\dfrac{1}{x}<10^{-4}$.

2°) Montrer que pour que l'on ait $|x^2+2x-3|<1$ il suffit que l'on ait $|x-1|<\dfrac{1}{5}$.

3°) Montrer que pour que l'on ait $|x^2+2x-3|<1$ il faut que l'on ait $x<2$.

4°) Résoudre l'inéquation : $|x^2+2x-3|<1$.

◇

1.05 Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

a) $\forall\,x\in\mathbb{R}, \exists\,y\in\mathbb{R}, x+2y=0$.

b) $\exists\,y\in\mathbb{R}, \forall\,x\in\mathbb{R}, x+2y=0$

◇

1.06 Soit $I=\left]-1,1\right[$. Montrer que si $x\in I$ et $y\in I$ alors $\dfrac{x+y}{1+xy}\in I$.

La réciproque est-elle vraie ?

$\diamond$

1.07 Montrer que : $\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|) \text{ et } \min(a,b) = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|).$$

$\diamond$

1.08 Soient $P(x)$ et $Q(x)$ des énoncés portant sur les éléments d'un ensemble E.
Dans chaque cas, laquelle des deux propositions entraîne l'autre ?

a) $[\forall\, x \in E, (P(x) \text{ ou } Q(x))]$ et $[(\forall\, x \in E, P(x)) \text{ ou } (\forall\, x \in E, Q(x))]$.

b) $[\exists\, x \in E, P(x) \text{ et } Q(x)]$ et $[(\exists\, x \in E, P(x)) \text{ et } (\exists\, x \in E, Q(x))]$.

$\diamond$

1.09 **1°)** Soit n un entier donné, $n \geqslant 3$, montrer que si n est un nombre premier alors n est un nombre impair.

2°) Pour tout entier naturel n, montrer que si n^2 et pair alors n est pair.

$\diamond$

1.10 **1°)** Donner une condition nécessaire sur x réel pour que $x^2 < 3$.

2°) Donner une condition suffisante sur x réel pour que $x^2 < 3$.

$\diamond$

1.11 **1°)** Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geqslant x+1$.

2°) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, t \in [0, \sqrt{n}], \mathrm{e}^{t^2}\big(1-\dfrac{t^2}{n}\big)^n \leqslant 1$.

$\diamond$

1.12 Résoudre l'inéquation : $x-1 \leqslant \sqrt{x+2}$.

$\diamond$

1.13 **1°)** Résoudre dans $\mathbb{R}$, et dans $[0, 2\pi[$, l'équation : $\sin x + \dfrac{1}{4\cos x} = 0$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$, et dans $[0, 2\pi[$, l'équation : $\sin x + \dfrac{\cos 2x}{2\cos x} = 0$.

$\diamond$

1.14 Résoudre dans $\mathbb{R}$:
1°) $|4x+5| = |3-x|$; **2°)** $|x-4| \leqslant 2x+1$.

$\diamond$

1.15 Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n < 2^n$.

$\diamond$

1.16 On considére la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

et on pose $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

1°) Montrer que : $\forall\, n \geqslant 1, \alpha^{n-2} \leqslant u_n \leqslant \alpha^{n-1}$.

2°) Vérifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, (n \geqslant 4 \implies n^2\alpha > (n+1)^2)$.

3°) Vérifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, (n \geqslant 13 \implies \alpha^{n-2} > n^2)$.

4°) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $u_n = n^2$.

◇

1.17 **1°)** Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=0}^{n} 3^{-i}$.

2°) Calculer pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$, $\sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{a^{k-j}}{2^j}$.

3°) Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\sqrt{i}}{2^i}$.

◇

1.18 Montrer que : $\prod\limits_{k=1}^{n} (2k+1) = \dfrac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

◇

1.19 On considère la suite u définie par : $u_0 = 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\prod\limits_{k=0}^{n} u_k}$.

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.

◇

1.20 Calculer les sommes suivantes :

a) $A_n = \sum\limits_{0 \leq i \leq j \leq n} \dfrac{i}{j+1}$.

b) $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{5}{k} - \dfrac{3}{k+2} - \dfrac{2}{k+3}\right)$, pour $n \geqslant 5$ et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} B_n$.

c) $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k^3}{(k+1)^2(k+2)}\right)$.

◇

1.21 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x)$.

a) Montrer que : $\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2, \sin a \cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.

b) Transformer en des sommes les expressions :
$A_n = \sin x \cos((2n+1)x)$ et $B_n = \sin(nx)\cos(nx)$.

c) Montrer que : $(\sin x) C_n = \dfrac{1}{2}\sin(2nx)$

d) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, C_n = \cos(nx)\dfrac{\sin(nx)}{\sin x}$.

◇

1.22 **1°)** Montrer que pour tout réel x, on a : $\cos(3x) = (2\cos(2x) - 1)\cos x$.

2°) Pour tout entier naturel n, non nul, on pose :
$S_n(\theta) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(2\cos(\dfrac{\theta}{3^k}) - 1)$, où $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right[$.

a) Montrer que : $\forall\,\theta \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[, \forall\, k \in [\![1, n]\!], 2\cos(\frac{\theta}{3^k}) - 1 > 0$.
En déduire l'existence de $S_n(\theta)$.

b) En utilisant la question **1°)**, montrer que :

$$S_n(\theta) = \ln[\cos(\frac{\theta}{2})] - \ln[\cos(\frac{\theta}{2.3^n})].$$

c) En déduire, en fonction de θ, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\theta)$.

◇

1.23 1°) Démontrer que : $\forall\, x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, 1 + \frac{x}{2} < \frac{1}{\sqrt{1-x}} < 1 + x$.

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ et on note E son ensemble de définition.

a) Déterminer E et montrer que la fonction f est paire.

b) Etudier les variations de f et calculer la limite de f en 1 à droite et en $+\infty$. Dresser alors le tableau des variations de f.

c) Montrer que : $x > \sqrt{2} \implies 0 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{2}$ et en utilisant la question **1°)**, montrer que : $\forall\, x > \sqrt{2}, x + \frac{1}{2x} < f(x) < x + \frac{1}{x}$.

3°) On considère la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ définie par : $\forall\, n \geqslant 2, S_n = \frac{1}{n^3}\sum\limits_{i=2}^{n} f(i^2)$ et on se propose dans cette question d'étudier la convergence de cette suite.

a) Rappeler la valeur de $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculer pour $n \geqslant 2$, la somme $T_n = \sum\limits_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k})$.

c) Montrer que : $\forall\, k \geqslant 2, \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ et en déduire que :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{n}.$$

4°) En utilisant la question **2°) c)**, déterminer deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ telles que :

$\forall\, n \geqslant 2, u_n \leqslant S_n \leqslant v_n$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ converge vers un réel que l'on déterminera.

II. INDICATIONS

1) Rappels des principales méthodes d'étude

❑ **Eléments de logique**

Soient P et Q deux propositions.

$\star$ Utiliser dans un raisonnement une **hypothèse** de la forme « P et Q » revient à utiliser les deux propositions P et Q qui sont supposées vraies simultanément.

$\star$ **Prouver** une proposition de la forme « P et Q », c'est montrer que cet assemblage est une proposition vraie. Il faut donc montrer que les deux propositions P et Q sont vraies. Après avoir prouvé, par exemple, P, on peut utiliser le résultat obtenu pour démontrer Q : il faut donc réfléchir à l'ordre dans lequel on montre les deux propositions.

$\star$ Utiliser dans un raisonnement une **hypothèse** de la forme « P ou Q » revient à raisonner en deux temps : dans un premier temps on suppose que P est vraie. On part alors de P pour mener à bien la preuve. Dans un second temps on suppose que P est fausse et comme « P ou Q » est supposée vraie, Q est vraie. On exploite alors le fait que P est fausse et Q vraie pour raisonner et conclure.

$\star$ Pour **prouver** une proposition de la forme « P ou Q », soit on prouve que P est vraie, le résultat à démontrer est alors acquis puisqu'alors « P ou Q » est vraie, soit on suppose que P est fausse et on prouve alors que Q est vraie.

$\star$ **Prouver** l'implication « $P \implies Q$ », c'est montrer que la proposition $P \implies Q$ est vraie, c'est-à-dire que si P est vraie, alors Q est vraie.
Ainsi dans tout cet ouvrage « on a $P \implies Q$ » est un raccourci pour dire « $P \implies Q$ est une proposition vraie ».
On peut aussi raisonner par **contraposée**, car démontrer que « $P \implies Q$ » est vraie est équivalent à démontrer que l'implication « non $Q \implies$ non P » est vraie. Par conséquent on suppose que Q est fausse et on en déduit que P est fausse.
$\star$ **Prouver** l'équivalence « $P \iff Q$ » revient à prouver les deux implications : $P \implies Q$ et $Q \implies P$. Les débutants ont intérêt à procéder selon ces deux étapes, car vouloir procéder par équivalences est souvent source d'erreurs logiques.

❏ **Sommes**.
$\star$ $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$; $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
$\star$ Si $q \neq 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et si $q = 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = n+1$.

$\star$ Pour tous nombres réels ou complexes : $\sum\limits_{k=0}^{n} (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum\limits_{k=0}^{n} u_k + \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$.

$\star$ Par associativité de l'addition, on a pour p et n entiers tels que $0 \leqslant p < n$, et tous nombres réels ou complexes : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{p} u_k + \sum\limits_{k=p+1}^{n} u_k$.

$\star$ Par **télescopage** on a pour tous nombres réels ou complexes :

$$\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$$

$\star$ Pour tous nombres réels ou complexes, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} u_{i,j}$$

Ces sommes étant aussi notées $\sum\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} u_{i,j}$.

⋆ En revanche $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} u_{i,j}$
Ces sommes étant aussi notées $\sum_{1\leq j\leq i\leq n} u_{i,j}$.

❑ **Produits**.
⋆ $\prod_{k=1}^{n} k = n!$; $\prod_{k=1}^{n} i = i^n$.
⋆ Si, pour tout indice k, $u_k \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\ln(\prod_{k=1}^{n} u_k) = \sum_{k=1}^{n} \ln(u_k)$.
⋆ Pour tous nombres réels ou complexes :

$$\prod_{k=1}^{n} (\lambda u_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} u_k \; ; \; \prod_{k=1}^{n} (u_k v_k) = (\prod_{k=1}^{n} u_k)\times(\prod_{k=1}^{n} v_k)$$

2) Indications spécifiques à chaque exercice

1.01. On peut utiliser, pour $b \geqslant 0$: $|a| \leqslant b \iff (a \leqslant b$ et $-a \leqslant b)$.

1.02. Raisonner par contraposée.

1.04. Il faut prouver en **2)** que l'on a : $|x-1| < \frac{1}{5} \implies |x^2+2x-3| < 1$ et en **3)** que l'on a : $|x^2+2x-3| < 1 \implies x < 2$.

1.07. Etudier deux cas en comparant a et b.

1.08. Pour prouver qu'une implication n'est pas vraie, trouver un «contre-exemple».

1.11. Faire l'étude des variations de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - x - 1$.

1.12. Faire attention au signe de $x-1$.

1.13. Pour **1)** utiliser l'égalité $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ et pour **2)** on peut se ramener à une équation du type $a\cos 2x + b\sin 2x = 0$, à mettre sous la forme $\cos(2x-\varphi) = 0$.

1.15. Raisonner par récurrence.

1.16. **1)** Faire un raisonnement par récurrence sur 2 rangs et remarquer que $1+\alpha = \alpha^2$.
4) Par condition nécessaire limiter d'abord les valeurs de n à considérer.

1.17. Attention au cas $a = 1/2$.

1.18. Faire apparaître au numérateur $(2n+1)!$.

1.20. **a)** Sommer d'abord sur i, puis sur j.

1.22. On peut commencer en écrivant $\cos(3x) = \cos(2x+x)$ et en développant.

III. CORRIGÉS DÉTAILLÉS DES EXERCICES

Corrigé 1.01

⋆ On utilise l'inégalité triangulaire de façon astucieuse :
$x = (x-y)+y \implies |x| = |(x-y)+y| \leqslant |x-y| + |y|$, donc :

$$|x| - |y| \leqslant |x-y|$$

⋆ Comme x et y jouent des rôles similaires, on a aussi :

$$|y| - |x| \leqslant |y-x| = |x-y|$$

Avec $a = |x| - |y|$, on a donc $a \leqslant |x-y|$ et $-a \leqslant |x-y|$, comme $|a|$ est l'un des nombres a ou $-a$, on a par conséquent $|a| \leqslant |x-y|$, soit :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leqslant |x-y|}$$

Corrigé 1.02

On raisonne par contraposée. Montrons donc que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a^3 + a = b^3 + b \implies a = b$$

Supposons donc que $a^3 + a = b^3 + b$, on a : $a^3 - b^3 + a - b = 0$, soit :
$(a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b) = 0$, ou encore :

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0 \quad (*)$$

Or $a^2 + ab + b^2 + 1 = (a + \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2 + 1 > 0$, on déduit donc de $(*)$, l'égalité $a - b = 0$, soit $a = b$.
Ainsi, par contraposée :

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a \neq b \implies a^3 + a \neq b^3 + b}$$

Corrigé 1.03

$x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2 \iff x - 2 + \dfrac{1}{x} \geqslant 0 \iff \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x} \geqslant 0 \iff \dfrac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$
La dernière inégalité est vraie pour $x > 0$, donc la première également, soit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x + \frac{1}{x} \geqslant 2}$$

Corrigé 1.04

1°) Par hypothèse $(10^{-4} < x < 10^{-3})$ ou $(10^{-4} < -x < 10^{-3})$, donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient :

$$(10^3 < \frac{1}{x} < 10^4) \text{ ou } (10^3 < -\frac{1}{x} < 10^4)$$

De la première proposition on déduit : $10^3 < \dfrac{1}{x}$. En multipliant par -1 les membres de la seconde proposition on a : $-10^4 < \dfrac{1}{x} < -10^3$ donc $\dfrac{1}{x} < -10^3 < 10^{-4}$. D'où le résultat.

2°) Il s'agit de montrer l'implication : $|x-1| < \dfrac{1}{5} \implies |x^2 + 2x - 3| < 1$.
Remarquons que $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$.
Par hypothèse : $-\dfrac{1}{5} < x - 1 < \dfrac{1}{5}$, soit $\dfrac{4}{5} < x < \dfrac{6}{5}$, donc $\dfrac{19}{5} < x + 3 < \dfrac{21}{5}$
et ainsi $|x+3| < \dfrac{21}{5}$.
En multipliant membre à membre les inégalités obtenues pour encadrer $|x-1|$ et $|x+3|$ il vient : $|x^2 + 2x - 3| < \dfrac{1}{5} \times \dfrac{21}{5} < 1$. D'où le résultat souhaité.

3°) Il s'agit de montrer l'implication : $|x^2 + 2x - 3| < 1 \implies x < 2$, soit encore en raisonnant avec la contraposée, que :

$$x \geqslant 2 \implies |x^2 + 2x - 3| \geqslant 1$$

Par hypothèse, on a : $x \geqslant 2$ donc $x - 1 \geqslant 1$ et $x + 3 \geqslant 5$ et par produit il vient : $x^2 + 2x - 3 \geqslant 5 > 1$, donc on a bien $|x^2 + 2x - 3| \geqslant 1$.

4°) Résoudre $|x^2 + 2x - 3| < 1$, est équivalent à résoudre : $-1 < x^2 + 2x - 3 < 1$, soit encore : $(x^2 + 2x - 4 < 0)$ et $(0 < x^2 + 2x - 2)$.

$\star$ Les racines de $x^2+2x-4=0$ sont $-\sqrt{5}-1$ et $\sqrt{5}-1$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+2x-4<0$ est donc

$$S_1 =]-\sqrt{5}-1, \sqrt{5}-1[$$

$\star$ Les racines de $x^2+2x-2=0$ sont $-\sqrt{3}-1$ et $\sqrt{3}-1$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+2x-2>0$ est donc $S_2 =]-\infty, -\sqrt{3}-1[\cup]\sqrt{3}-1, +\infty[$.

[On rappelle que si l'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux racines réelles, alors le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire entre les racines.]

Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x^2+2x-3|<1$ est :

$$\boxed{S = S_1 \cap S_2 =]-\sqrt{5}-1, -\sqrt{3}-1[\cup]\sqrt{3}-1, \sqrt{5}-1[}$$

Corrigé 1.05

a) Cette première propriété signifie que pour tout réel x, il existe un réel y qui en fait vaut $-2x$. Cette proposition est donc manifestement vraie.

b) Par contre la seconde proposition est fausse : si elle était vraie, elle traduirait qu'il existe un réel y, indépendant de x, tel que quel que soit le réel x on ait $x+2y=0$. Pour y donné , si on choisit par exemple $x=1-2y$, alors $x+2y=1\neq 0$. D'où l'impossibilité de trouver y convenant et le résultat.

Corrigé 1.06

$\star$ Si on suppose $x\in I$ et $y\in I$, alors $|x|<1$ et $|y|<1$, donc $|xy|<1$ et en particulier $xy>-1$, donc $1+xy>0$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{1+xy}\in I &\iff -1<\frac{x+y}{1+xy}<1 \iff -(1+xy)<x+y<1+xy\\ &\iff (x+y+xy+1>0 \text{ et } xy-x-y+1>0)\\ &\iff ((1+x)(1+y)>0 \text{ et } (1-x)(1-y)>0)\end{aligned}$$

Comme $-1<x$ et $-1<y$, on a bien $(1+x)(1+y)>0$ et de même comme $1>x$ et $1>y$, on a également $(1-x)(1-y)>0$. Ainsi la dernière proposition est vraie et il en est de même de la première :

$$\boxed{(x,y)\in I^2 \implies \frac{x+y}{1+xy}\in I}$$

$\star$ Il suffit de prendre $x=3$, $y=4$ pour remarquer que $\dfrac{x+y}{1+xy}=\dfrac{7}{13}\in I$, alors que $x\notin I$. La réciproque est donc fausse.

Corrigé 1.07

Les réels a et b sont comparables et deux cas se présentent :

$\star$ Si $a\leqslant b$, alors $|a-b|=b-a$, $\max(a,b)=b$ et

$$\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)=\frac{1}{2}(a+b+b-a)=b=\max(a,b)$$

d'où l'égalité voulue.