Espaces vectoriels *de dimension finie*

01

RÉPARTITION DES EXERCICES

Exercices de niveau 1	**1.01 → 1.08**
Exercices de niveau 2	**1.09 → 1.13**
Pour aller plus loin	**1.14 → 1.15**

I. ÉNONCÉS DES EXERCICES

1.01 On considère : $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + 3y + z = 0\}$

1°) Montrer que H est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$.

2°) Trouver une base de H.

3°) Déterminer deux s.e.v. supplémentaires de H dans $\mathbb{R}^4$.

◇

1.02 On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère les quatre vecteurs :

$v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (1, 2, 4), v_3 = (3, -1, a), v_4 = (2, 3, b)$.

Déterminer a et b tels que : $\text{Vect}\{v_1, v_2\} = \text{Vect}\{v_3, v_4\}$.

◇

1.03 Montrer que si (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$ alors $(a+b+c, a+b, 2a+b-c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

◇

1.04 On considère $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x+y+z+t = 0 \text{ et } x-y-2z = 0\}$. Démontrer que E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ et déterminer un supplémentaire F de E dans $\mathbb{R}^4$.

◇

1.05 Soit n un entier naturel, on considère la famille $(P_i)_{0 \le i \le n}$ des polynômes définis par $P_i = (X-a)^i(X-b)^{n-i}$, où a et b sont deux réels distincts. Démontrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

◇

1.06 On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y - z = 0\}$.

1°) Montrer que F et G sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ et déterminer leur dimension.

2°) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.

3°) F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

$\diamond$

1.07 Soient a, b, c, d quatre nombres réels deux à deux distincts. On pose :

$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ P(a) = P(b) = P(c) = 0\}$ et

$G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(d) = P'(d) = 0\}$.

1°) Montrer que F et G sont des s.e.v. de $\mathbb{R}_3[X]$.

2°) Montrer que $F + G = F \oplus G$.

3°) Les s.e.v. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$?

$\diamond$

1.08 On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on considère les vecteurs : $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1, -1)$, $u_3 = (1, 3, 1, 3)$, $u_4 = (1, 2, 0, 2)$, $u_5 = (1, 2, 1, 2)$ et $u_6 = (3, 1, 3, 1)$.

On note $E_1 = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$, $E_2 = \text{Vect}\{u_4, u_5, u_6\}$.

1°) a) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est liée et déterminer une relation de dépendance entre u_1, u_2 et u_3.

b) En déduire une base de E_1.

2°) a) Déterminer une base de E_2.

b) Déterminer 4 réels a, b, c, d tels que :

$(x, y, z, t) \in E_2 \iff ax + by + cz + dt = 0$.

c) Déterminer un s.e.v. H supplémentaire de E_2 dans $\mathbb{R}^4$.

$\diamond$

1.09 **Un exemple d'utilisation du théorème de la base incomplète**

On considère dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E les deux systèmes de vecteurs : $S = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $S' = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ extrait de S.

En utilisant le théorème de la base incomplète démontrer que si $\text{rg}\, S = r$, alors $\text{rg}\, S' \geqslant r + p - n$.

$\diamond$

1.10 Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$E_n = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \ / \ \exists\, P \in \mathbb{R}_n[X], \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = P(x)\mathrm{e}^{x}\}$, et

$F_n = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \ / \ \exists\, P \in \mathbb{R}_n[X], \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = P(x)\mathrm{e}^{-x}\}$

1°) Démontrer que E_n et F_n sont des s.e.v. de dimension finie et donner une base de chacun d'eux.

2°) On pose $G_n = E_n + F_n$. Déterminer la dimension de G_n.

$\diamond$

1.11 On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble :

$C = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AM = MA\}$.

1°) Montrer que C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2°) a) Soit I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{Vect}\{I_2, A\} \subset C$.

b) Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que $B \in C \iff a = d$ et $c = 4b$.

c) En déduire que (I_2, A) est une base de C.

3°) a) Montrer que pour tout entier naturel p, il existe un unique couple de réels (α_p, β_p) tel que : $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_2$. Donner les valeurs de $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$.

b) Montrer que $A^2 = 8A - 12I_2$.

c) Montrer que pour tout p, $\alpha_{p+1} = 8\alpha_p + \beta_p$ et $\beta_{p+1} = -12\alpha_p$.

d) En déduire les valeurs de α_p, β_p et de A^p en fonction de p.

$\diamond$

1.12 On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ et on pose
$F = \{P \in E, P(X) = P(-X)\}$,
$G = \{P \in E, P(0) = P(3) = P(4) = 0\}$ et
$H = \{P \in E, P(3) = P(4) = P(5) = 0\}$.

1°) Montrer que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E et déterminer la dimension de chacun.

2°) Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

$\diamond$

1.13 **1°)** On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $v_1 = (1, 0, 1, -1), v_2 = (0, 1, 1, -2)$, $v_3 = (2, -3, -1, 4)$ et on note $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$.

1°) Déterminer la dimension du s.e.v. F.

2°) On considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 2, 0, 3)$ et on note $G = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

3°) Soit $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

a) Montrer que H est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa dimension.

b) Déterminer $\dim(F + H)$.

$\diamond$

1.14 **Exemple de supplémentaires**

Soit E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = ax.\mathrm{e}^{2x} + b\mathrm{e}^{2x} + cx.\mathrm{e}^{-2x} + d\mathrm{e}^{-2x}$, où $a,\ b, c, d$ sont des nombres réels quelconques

1°) Démontrer que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2°) Déterminer une base de E.

3°) On note P l'ensemble des applications paires de E et I l'ensemble des applications impaires de E.

a) Démontrer que $P = \text{Vect}(h, k)$, où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{-2x}$ et $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}$.

b) Déterminer de même une famille génératrice de I.

c) En déduire une base de P et une base de I.

4°) Démontrer que : $E = P \oplus I$.

◇

$\boxed{\textbf{1.15}}$ On considère une fonction φ continue sur $\mathbb{R}$ et on note E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f''(x) + \varphi(x)f(x) = 0.$

1°) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On suppose que E contient une fonction u qui ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$, et on pose $v : x \mapsto u(x)\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(u(t))^2}\,dt$.

2°) Montrer que $v \in E$. Prouver alors que la dimension E est supérieure ou égale à 2.

On admettra dans la suite que $\dim E = 2$.

3°) Pour f, g éléments de E, pour tout réel x, on pose :

$\theta_{f,g}(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x).$

a) Montrer que $\theta_{f,g}$ est une fonction constante.

On pose alors $W(f, g) = \theta_{f,g}(0)$.

b) Montrer que $W(f, g) = 0$ si et seulement si f et g sont liées.

4°) a) Montrer qu'un élément f de E qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ est de la forme : $f(x) = \varepsilon \exp(h(x))$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et avec h de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifie : $\forall\, x \in \mathbb{R}, h''(x) + (h'(x))^2 + \varphi(x) = 0$.

b) Déterminer tous les éléments de E qui vérifient :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f''(x) = (1 + x^2)f(x).$

II. INDICATIONS

1) Rappels des principales méthodes d'étude

❑ Un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie est dit de **dimension finie**. Un tel espace admet toujours des bases et elles ont toutes le même cardinal, appelé **dimension** de l'espace.

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n, alors on a : B base de $E \iff B$ est libre et $\text{card}\, B = n \iff B$ est génératrice et $\text{card}\, B = n$.

❑ Si F est un s.e.v. de E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$. De plus si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

❑ Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E, on appelle **rang** (noté rg) de cette famille l'entier naturel défini par :

$\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = \dim \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n).$

Si E est de dimension n, alors :

$\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_n) = n \iff (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E.
Le rang d'une famille de vecteurs est inchangé quand on ajoute à un des vecteurs de la famille une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille.

❑ Soient F et G deux s.e.v. de E un $\mathbb{K}$-e.v. on appelle somme de F et G le s.e.v. de E, noté $F + G$ défini par $F + G = \{x_F + x_G, (x_F, x_G) \in F \times G\}$.
On dit que la somme est directe et on note $F + G = F \oplus G$, si $F \cap G = \{0_E\}$, et dans le cas où $F \oplus G = E$, on dit que F et G sont deux s.e.v. supplémentaires dans E. On a les équivalences suivantes :
$E = F \oplus G \iff$ tout vecteur de E se décompose de manière unique en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
Dans le cas où E est de dimension finie, on a aussi :
$E = F \oplus G \iff E = F + G$ et $\dim E = \dim F + \dim G$
$\iff F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$
$\iff$ la réunion d'une base de F et d'une base de G est une base de E

❑ Soient $F_1, \dots, F_p$, des s.e.v. de E un $\mathbb{K}$-e.v., on appelle somme des s.e.v. $F_1, \dots, F_p$ le s.e.v. de E noté $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ défini par
$F_1 + \cdots + F_p = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_p, x_i \in F_i, 1 \leqslant i \leqslant p\}$.
On dit que la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est directe et on la note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$, si tout vecteur de $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ se décompose de manière unique en la somme de vecteurs de $F_1, F_2, \dots, F_p$. On a la caractérisation suivante :
$\sum\limits_{i=1}^{p} F_i = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i \iff \forall\,(x_1, x_2, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p,\ \sum\limits_{i=1}^{p} x_i = 0_E \implies x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0_E$
Dans le cas où les F_i sont de dimension finie, on a :
$\sum\limits_{i=1}^{p} F_i = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i \iff$ la réunion de bases de chaque F_i donne une base de $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$.
On a aussi : $\dim \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i = \sum\limits_{i=1}^{p} \dim F_i$.

❑ **Formule de Grassmann** : soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et F, G deux s.e.v de E de dimension finie, on a : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

---

2) Indications spécifiques à chaque exercice

1.01. Les supplémentaires de H (= hyperplan) sont les droites non incluses dans H.

1.02. Montrer d'abord que ces deux espaces sont de dimension 2, voir ensuite à quelles conditions v_3 et v_4 appartiennent à $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

1.03. Il suffit de montrer que $(a + b + c, a + b, 2a + b - c)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1.04. On peut commencer par déterminer la dimension de F.

1.05. Considérer une éventuelle relation de dépendance.

1.06. **2)** Considérer une famille génératrice de $F + G$. **3)** Raisonner à l'aide des dimensions.

1.07. Regardez les dimensions ...

1.08. **2)** **b)** Traduire l'appartenance à E_2 à l'aide de la famille génératrice donnée.

1.09. Soit $r' = \operatorname{rg} S'$, dans le cas où $r > r'$ et $p > r'$, si on complète $(u_1, \ldots, u_{r'})$ par $v_1, \ldots, v_{r-r'}$ pour obtenir une base de E, on montrera que
$\operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_{r-r'}) \subset \operatorname{Vect}(u_{p+1}, \ldots, u_n)$.

1.10. On peut considérer les fonctions $f_k : x \mapsto x^k \mathrm{e}^x$ et $g_k : x \mapsto x^k \mathrm{e}^{-x}$.

1.11. 3) Appliquer le principe de récurrence et utiliser la notion de suite récurrente linéaire. . .

1.13. Appliquer la formule de Grassmann

1.14. 4) On montrera que $P \cap I = \{0\}$ et on raisonnera à l'aide des dimensions.

1.15. 3) b) raisonner par contraposée en exprimant u, v sur la base (f, g). **4) b)** Choisir h telle que $h'' = 1$.

III. CORRIGÉS DÉTAILLÉS DES EXERCICES

Corrigé 1.01

1°) $(x, y, z, t) \in H \iff z = -x - 3y$, donc :
$H = \{(x, y, -x-3y, t) \in \mathbb{R}^4, (x, y, t) \in \mathbb{R}^3\}$
$\quad = \{x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, -3, 0) + t(0, 0, 0, 1)\} = \operatorname{Vect}(u, v, w)$, avec :

$$u = (1, 0, -1, 0), v = (0, 1, -3, 0), w = (0, 0, 0, 1)$$

c'est donc bien un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de $\mathbb{R}^4$.

2°) D'après ce qui précède, la famille (u, v, w) est une famille génératrice de H. Il suffit de montrer qu'elle est libre.
Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$:
$\alpha u + \beta v + \gamma w = (0, 0, 0, 0) \iff (\alpha, \beta, -\alpha - 3\beta, \gamma) = (0, 0, 0, 0)$, ce qui donne aisément $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Ainsi le triplet (u, v, w) est une base de H et donc $\dim H = 3$.

3°) Comme $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ et $\dim H = 3$, tout s.e.v. supplémentaire D de H dans $\mathbb{R}^4$ est de dimension 1 et on a :

$$\mathbb{R}^4 = H \oplus D \iff [\dim D = 1 \text{ et } D \cap H = \{0\}] \iff [\dim D = 1 \text{ et } D \not\subset H]$$

On part donc d'un vecteur n'appartenant pas à H et les droites $D_1 = \operatorname{Vect}(1, 0, 0, 0)$, $D_2 = \operatorname{Vect}(0, 1, 0, 0)$ conviennent parfaitement (mais vous avez une infinité de choix !)

Corrigé 1.02

$\star$ On remarque que (v_1, v_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$, ainsi que (v_3, v_4) (car les coordonnées sont non proportionnelles), donc :

$$\dim \operatorname{Vect}(v_1, v_2) = \dim \operatorname{Vect}(v_3, v_4) = 2$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \operatorname{Vect}(v_1, v_2) = \operatorname{Vect}(v_3, v_4) &\iff \operatorname{Vect}(v_3, v_4) \subset \operatorname{Vect}(v_1, v_2) \\ &\iff v_3 \in \operatorname{Vect}(v_1, v_2) \text{ et } v_4 \in \operatorname{Vect}(v_1, v_2) \end{aligned}$$

$\star$ Déterminons une équation du plan vectoriel $\operatorname{Vect}(v_1, v_2)$:
$u = (x, y, z) \in \operatorname{Vect}(v_1, v_2) \iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, u = \alpha v_1 + \beta v_2$

$$\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} x=\alpha+\beta \\ y=\alpha+2\beta \\ z=-\alpha+4\beta \end{cases} \iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} \beta=y-x \\ \alpha=2x-y \\ z=-6x+5y \end{cases}$$

Par conséquent $u=(x,y,z)\in \mathrm{Vect}(v_1,v_2)\iff -6x+5y-z=0$.

$\star$ $v_3=(3,-1,a)\in\mathrm{Vect}(v_1,v_2)\iff -18-5-a=0\iff a=-23$.
$\star$ $v_4=(2,3,b)\in\mathrm{Vect}(v_1,v_2)\iff -12+15-b=0\iff b=3$.

Ainsi, la réponse est : $\boxed{(a,b)=(-23,3)}$

Corrigé 1.03

Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha(a+b+c)+\beta(a+b)+\gamma(2a+b-c)=0$.
Ceci s'écrit : $(\alpha+\beta+2\gamma)a+(\alpha+\beta+\gamma)b+(\alpha-\gamma)c=0$.
Comme la famille (a,b,c) est libre, on en déduit :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha-\gamma=0 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma=0 \\ \gamma=0 \\ \alpha=\gamma \end{cases} \text{, soit } \alpha=\beta=\gamma=0.$$

Donc $(a+b+c,a+b,2a+b-c)$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
Composée de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé 1.04

On a : $(x,y,z,t)\in E \iff \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ -2y-3z-t=0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} y=\frac{1}{2}(-3z-t) \\ x=\frac{1}{2}(z-t) \end{cases}$$

Ainsi : $E=\left\{(\frac{1}{2}(z-t),\frac{1}{2}(-3z-t),z,t),(z,t)\in\mathbb{R}^2\right\}$
$\quad=\left\{\frac{z}{2}(1,-3,2,0)+\frac{t}{2}(-1,-1,0,2),(z,t)\in\mathbb{R}^2\right\}$

Les deux vecteurs $u=(1,-3,2,0)$ et $v=(-1,-1,0,2)$ étant clairement non colinéaires, ils forment une base de E, qui est de dimension 2.

On a choisi pour inconnues principales x et y, donc pour inconnues secondaires les paramètres z et t. Il est alors facile de voir que les vecteurs $u'=(0,0,1,0)$ et $v'=(0,0,0,1)$ sont tels que (u,v,u',v') est une base de $\mathbb{R}^4$ (il suffit d'écrire une combinaison linéaire nulle de ces quatre vecteurs et le système se résout mentalement).

$$\boxed{F=\mathrm{Vect}(u',v') \text{ est un supplémentaire de } E \text{ dans } \mathbb{R}^4}$$

Corrigé 1.05

$\star$ Supposons la famille $(P_1,\dots,P_n)$ liée. Il existe alors des nombres réels $\lambda_1,\dots,\lambda_n$**non tous nuls** tels que :

$$\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\cdots+\lambda_nP_n=0$$

Comme les scalaires ne sont pas tous nuls, on peut considérer le plus petit des indices i tels que $\lambda_i \neq 0$.

Soit k cet indice, la relation se réduit à :

$$\lambda_k P_k + \lambda_{k+1} P_{k+1} + \cdots + \lambda_n P_n = 0$$

soit :

$$\lambda_k (X-a)^k (X-b)^{n-k} + \lambda_{k+1} (X-a)^{k+1} (X-b)^{n-k-1} + \cdots + \lambda_n (X-a)^n = 0$$

ou encore :

$$(X-a)^k \big(\lambda_k (X-b)^{n-k} + \lambda_{k+1} (X-a)(X-b)^{n-k-1} + \cdots + \lambda_n (X-a)^{n-k}\big) = 0$$

Comme $(X-a)^k$ n'est pas le polynôme nul, on peut simplifier et il reste :

$$\lambda_k (X-b)^{n-k} + \lambda_{k+1} (X-a)(X-b)^{n-k-1} + \cdots + \lambda_n (X-a)^{n-k} = 0$$

En substituant **maintenant** à X la valeur a, il reste $\lambda_k (a-b)^k = 0$, et comme $b \neq a$, on obtient $\lambda_k = 0$.

Ce résultat est contradictoire avec notre hypothèse et donc il n'existe pas de combinaison linéaire nulle des polynômes $P_1, \ldots, P_n$ qui soit non triviale. Ceci prouve que la famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est libre.

$\star$ Comme cette famille libre est composée de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$, c'est une base de cet espace.

[Noter la technique utilisée pour éviter d'avoir à mettre en place une récurrence : on raisonne par contraposée et on se place au début des problèmes : on démontre alors que le premier problème rencontré n'est pas un problème ...
il n'y a donc pas de problème ! Méditez quelques instants sur ce procédé.]

Corrigé 1.06

1°) F a pour équation $z = x + y$, donc :
$F = \{(x, y, x+y) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\{(1,0,1), (0,1,1)\}$,
ainsi F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. De plus comme les deux vecteurs $u = (1,0,1)$ et $v = (0,1,1)$ ne sont pas colinéaires, la famille (u, v) est libre : libre et génératrice (u, v) est une base de F et $\dim F = 2$.

On raisonne de même pour G :
$G = \{(x, y, 2x-y) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\{(1,0,2), (0,1,-1)\}$.
Les vecteurs $u' = (1,0,2)$ et $v' = (0,1,-1)$ ne sont pas colinéaires, ils forment une base de G et $\dim G = 2$.

2°) Une famille génératrice de $F+G$ est obtenue par juxtaposition (les matheux aiment bien dire «concaténation» c'est plus class) d'une famille génératrice de F et d'une famille génératrice de G, ainsi, si on note (i, j, k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, il vient à l'aide de manipulations élémentaires :

$$\begin{aligned} F+G &= \mathrm{Vect}\{u, v, u', v'\} = \mathrm{Vect}\{u, v+v', 2u-u', v'\} \\ &= \mathrm{Vect}\{i+k, 2j, i, j-k\} = \mathrm{Vect}\{i, j, k\} = \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

3°) On a $\dim F + \dim G = 4 \neq \dim \mathbb{R}^3$: F et G ne peuvent pas être supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

On peut même être un peu plus précis : la formule de Grassmann donne :