

1

Les suites

SENS DE VARIATION D'UNE SUITE

- La suite (u_n) est **croissante** lorsque pour tout entier n , $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite (u_n) est **décroissante** lorsque pour tout entier n , $u_{n+1} \leq u_n$.
- La suite (u_n) est **constante** lorsque pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n$.

LES SUITES ARITHMÉTIQUES

- Une **suite arithmétique** est une suite de nombres dont chaque terme est obtenu en ajoutant au terme précédent un même nombre réel a appelé la raison.

$$u_0 \xrightarrow{+a} u_1 \xrightarrow{+a} u_2 \xrightarrow{+a} \dots$$

On a ainsi : $u_{n+1} = u_n + a$.

- **Expression de u_n en fonction de n**

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison a et de premier terme u_0 ou u_1 , alors on a :

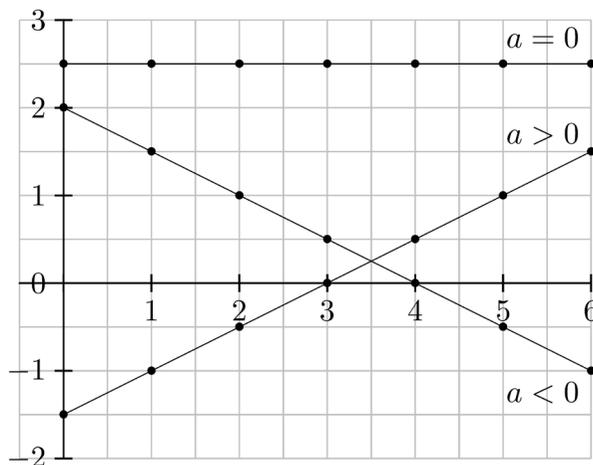
$$u_n = u_0 + n \times a$$

ou

$$u_n = u_1 + (n-1) \times a$$

- **Sens de variation**

Si $a > 0$, alors la suite est croissante, si $a < 0$, alors la suite est décroissante, et si $a = 0$, alors la suite est constante.



● Somme de n termes consécutifs

Soit S la somme de n termes **consécutifs** d'une suite (u_n) arithmétique.

$$S = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times \text{nombre de termes}}{2}$$

$$\text{Cas particulier : } S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(u_0 + u_n) \times (n+1)}{2}.$$

Exemple : soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 3$ et de raison 2. Calcul de la somme $S = u_1 + \dots + u_9$:

Le premier terme est $u_1 = 3$.

Le dernier est $u_9 = u_1 + (9 - 1) \times 2 = 3 + 8 \times 2 = 19$.

La somme S comporte 9 termes donc :

$$S = \frac{(3+19) \times 9}{2} = \frac{22 \times 9}{2} = 99.$$

LES SUITES GÉOMÉTRIQUES

● Une **suite géométrique** est une suite de nombres dont chaque terme est obtenu en multipliant le terme précédent par un même nombre réel b appelé la raison.

$$u_0 \xrightarrow{\times b} u_1 \xrightarrow{\times b} u_2 \xrightarrow{\times b} \dots$$

On a alors : $u_{n+1} = u_n \times b$.

On ne s'intéressera qu'aux suites géométriques à termes positifs. On aura donc toujours $b > 0$.

● Expression de u_n en fonction de n

Si (u_n) est une suite géométrique de raison b et de premier terme u_0 ou u_1 , alors on a :

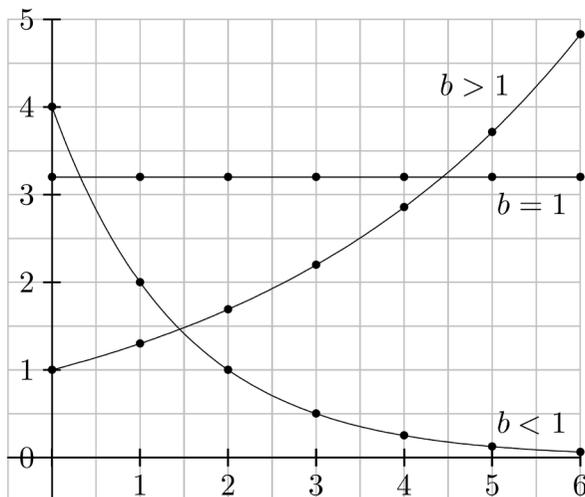
$$u_n = u_0 \times b^n$$

ou

$$u_n = u_1 \times b^{n-1}$$

● Sens de variation

Si $b > 1$, alors la suite est croissante, si $b < 1$, alors la suite est décroissante, et si $b = 1$, alors la suite est constante.



● Somme de n termes consécutifs

Soit S la somme de n termes consécutifs d'une suite (u_n) géométrique de raison $b \neq 1$.

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - b^{\text{nombre de termes}}}{1 - b}$$

Cas particulier : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$.

Exemple : soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $0,5$. Calcul de la somme $S = u_0 + \dots + u_8$:

$$S = u_0 \times \frac{1 - b^{8+1}}{1 - b} = 10 \times \frac{1 - 0,5^9}{1 - 0,5} = 10 \times \frac{1 - 0,5^9}{0,5} \approx 19,96$$

Exercice 1 : L'essentiel est-il connu ?

* Exercice 1 : QCM

🕒 20 min

1. La suite définie par $u_n = 5 \times 0,7^n$ est :
 - a) géométrique de premier terme $u_0 = 5$
 - b) géométrique de raison 5
 - c) arithmétique de raison $0,7$
 - d) géométrique de raison $0,7$

2. La suite définie par $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = u_n - 3$ est :
 - a) arithmétique et croissante
 - b) géométrique et croissante
 - c) arithmétique et décroissante
 - d) géométrique et décroissante
3. La suite définie par $u_0 = 0,6$ et $u_{n+1} = u_n \times 1,2$ est :
 - a) arithmétique et croissante
 - b) géométrique et croissante
 - c) arithmétique et décroissante
 - d) géométrique et décroissante
4. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3. La somme $S = u_0 + \dots + u_{12}$ vaut :
 - a) 240
 - b) 1 594 322
 - c) 260
 - d) 195
5. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 1,5. La somme $S = u_0 + \dots + u_{13}$ vaut environ (arrondi à 10^{-2} près) :
 - a) 122
 - b) 387,24
 - c) 581,86
 - d) 561,08.

Exercice 2 : Nature et sens de variation d'une suite

* Exercice 2

⌚ 10 min

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite (u_n) est arithmétique ou géométrique, et déterminer son sens de variation.

1. (u_n) est la suite définie par $u_1 = -4$ et $u_{n+1} = u_n + 5$.
2. (u_n) est la suite définie par $u_n = 0,8 \times 3^n$ pour tout entier $n \geq 0$.
3. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n \times 0,5$.
4. (u_n) est la suite définie par $u_n = 2 - 1,4n$ pour tout entier $n \geq 0$.

Exercices 3 à 6 : Calcul de sommes de termes

* Exercice 3

⌚ 20 min

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3,2$ et de raison 4,7.
 - a) Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_9$.
 - b) Calculer la somme $S' = u_5 + u_6 + \dots + u_{26}$.
2. Soit (v_n) la suite arithmétique de premier terme $v_1 = 17$ et de raison $-1,2$.
 - a) Calculer la somme $T = v_1 + v_2 + \dots + v_{13}$.
 - b) Calculer la somme $T' = v_8 + v_9 + \dots + v_{22}$.

*** Exercice 4**

🕒 20 min

Dans ce exercice, les résultats seront arrondis au centième.

1. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 120$ et de raison 0,6.
 - a) Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_7$.
 - b) Calculer la somme $S' = u_8 + u_9 + \dots + u_{16}$.
2. Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_1 = 3$ et de raison 3,7.
 - a) Calculer la somme $T = v_1 + v_2 + \dots + v_6$.
 - b) Calculer la somme $T' = v_5 + v_6 + \dots + v_{10}$.

**** Exercice 5**

🕒 15 min

À l'aide d'une suite arithmétique, calculer le plus rapidement possible la somme $S = 1 + 2 + \dots + 100$.

**** Exercice 6**

🕒 15 min

En utilisant une suite géométrique, calculer la somme $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{128}$.

Exercices 7 à 9 : Exercices d'applications*** Exercice 7**

🕒 20 min

À la naissance de leur enfant, un couple décide de lui constituer une épargne pour ses 18 ans. Pour sa naissance, ils mettent de côté 100 €. Ensuite, à chaque anniversaire, la somme versée est augmentée de 20 €.

On note u_0 la somme mise de côté pour sa naissance, puis u_n la somme versée pour son n -ième anniversaire.

1. Déterminer les valeurs de u_1 et u_2 .
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier. Préciser son premier terme et sa raison.
3. Quel sera le montant du dernier versement, effectué à l'occasion de son 18^e anniversaire ?
4. Quel sera le montant total de l'épargne dont disposera l'enfant pour ses 18 ans ?

**** Exercice 8**

🕒 20 min

Ludivine décide de consulter un nutritionniste à cause de son surpoids.

Après analyse de ses repas, le médecin constate que Ludivine absorbe en moyenne 2 600 calories par jour, au lieu des 2 000 recommandées.

résumés de cours

exercices

contrôles

corrigés

Pour l'aider à retrouver une alimentation équilibrée en douceur, il lui conseille de baisser chaque jour ses apports caloriques de 2 % par rapport au jour précédent.

Le premier jour, Ludivine garde un repas habituel, puis met en place la stratégie donnée par le nutritionniste. On note u_1 l'apport calorique des repas de la première journée, u_2 celui de la deuxième journée et ainsi de suite.

1. Donner u_1 , puis calculer u_2 et u_3 .
2. Prouver que la suite (u_n) est géométrique, puis que $u_n = 2\,600 \times 0,98^{n-1}$.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quel jour du programme Ludivine aura atteint l'objectif des 2 000 calories.

** Exercice 9

🕒 30 min

Un supermarché lance la commercialisation d'une miche de pain bio le 1^{er} juillet. 725 miches sont vendues ce mois-là. Avec le succès, le gérant espère augmenter sa vente de 3 % chaque mois. Il fait une simulation pour estimer ses ventes sur une période d'un an.

Il nomme v_n le nombre de miches vendues le n -ième mois, le rang 0 correspondant au mois test de juillet.

1. Calculer v_1 et v_2 . Donner une interprétation concrète de ces nombres.
2. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier. Préciser son premier terme et sa raison.
3. Donner en justifiant le sens de variation de cette suite. Est-ce logique ?
4. Exprimer v_n en fonction de n .
5. Avec ce modèle, déterminer le nombre de miches qui seraient vendues pendant la première année.

Exercice 10 : Avec un tableur

** Exercice 10

🕒 25 min

Lors d'une soirée bien arrosée entre amis, Nicolas s'inquiète de son taux d'alcoolémie. Il est en effet venu en voiture. À l'aide d'un instrument de mesure disponible dans le bar, il constate que son taux d'alcoolémie est de 1,2 à 23 h. Nicolas décide alors de stopper toute consommation de boisson alcoolisée pour la soirée et calcule l'heure à laquelle il pourra reprendre sa voiture. Il sait que le taux d'alcoolémie baisse d'environ 0,15 par heure.

On note u_n le taux d'alcoolémie de Nicolas n heures après 23 h. Ainsi $u_0 = 1,2$.

1. Quelle sont la nature et le sens de variation de la suite (u_n) ? Justifier.
2. Justifier que pour tout entier n , $u_n = 1,2 - 0,15n$.
3. À l'aide de ce modèle, déterminer l'heure à laquelle Nicolas pourra reprendre sa voiture.

On rappelle que le taux limite d'alcoolémie autorisé est de 0,5.

4. Le lendemain matin, Nicolas décide de simuler son taux d'alcoolémie à l'aide d'un tableau.

	A	B	C
1	heure	rang de la suite	taux d'alcoolémie
2	23h	0	1,2
3	0h	1	
4	1h	2	
5	2h	3	
6	3h	4	

- a) Quelle formule Nicolas doit-il saisir en C3 pour obtenir, par recopie automatique vers le bas, son taux d'alcoolémie u_n ?
 b) En complétant le tableau, trouver l'heure à laquelle Nicolas peut estimer avoir retrouvé un taux d'alcoolémie nul.

Exercice 11 : Intérêts simples et composés

*** Exercice 11

🕒 45 min

Les résultats seront donnés au centime d'euro près.

Le jour anniversaire de ses 18 ans, un jeune possédant 2 000 € d'économies, décide de placer son argent. Une banque lui propose deux sortes de placement.

Placement A : La totalité du capital est placée sur un livret au taux de 4 % par an à intérêts simples, c'est-à-dire que le capital augmente chaque année de 80 €.

Placement B : La totalité du capital est placée sur un livret au taux de 3,5 % par an à intérêts composés, c'est-à-dire que le capital augmente de 3,5 % chaque année.

Par la suite, on suppose qu'il ne fait plus aucun retrait ni versement.

- On note C_n le capital qu'il aura acquis au bout de n années s'il choisit le placement A.
 - Calculer C_1 et C_2 .
 - Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n . En déduire que les nombres $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ sont les termes successifs d'une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - Donner l'expression de C_n en fonction de n .
- On note T_n le capital qu'il aura acquis au bout de n années s'il choisit le placement B.
 - Calculer T_1 et T_2 .
 - Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n . En déduire que les nombres $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n$ sont les termes successifs d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - Donner l'expression de T_n en fonction de n .

3. Recopier et compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n										
T_n										

4. En déduire, en fonction du nombre d'années, le placement le plus avantageux.

Contrôle

🕒 1 h 30 min — 20 points

Julie postule pour un emploi d'aide soignante dans deux cliniques privées. La clinique BEAU RIVAGE propose à compter du 1^{er} janvier 2008, un contrat à durée déterminée (CDD) de 2 ans avec un salaire net de 1 200 euros le premier mois, puis une augmentation de 0,7 % chaque mois sur la période des 2 ans.

La clinique JOLI LAC propose un salaire de départ de 1 150 euros augmenté de 12 euros chaque mois.

Partie I. UTILISATION D'UN TABLEUR

Julie utilise un tableur pour visualiser les propositions des deux cliniques. Voici les résultats qu'elle obtient :

	A	B	C	D	E	F	G
1	Mois		BEAU RIVAGE			JOLI LAC	
2			Salaire	Salaire cumulé		Salaire	Salaire cumulé
3	1		1 200	1 200		1 150	1 150
4	2						
5							
...							

- La cellule F4 contient le salaire, proposé à Julie le deuxième mois par la clinique JOLI LAC. Quelle formule destinée à être recopiée vers le bas, faut-il écrire dans la cellule F4 ? (1 point)
- La formule saisie dans la cellule C4 est : = C3 * 1,007. Cette formule est recopiée vers le bas. Quelle formule se trouve alors dans la cellule C5 ? (1 point)
- Parmi les trois formules suivantes, déterminer toutes celles que l'on peut écrire dans la cellule G4 et qui permettent de connaître par recopie vers le bas les salaires cumulés proposés par la clinique JOLI LAC. (1 point)

(a) = G\$3+F4 (b) = G3 + F4 (c) = SOMME (\$F\$3 : F4)