Chapitre I

Les suites numériques

Les suites voient leur importance dans tous les aspects de la discrétisation (voir l'échantillonnage) que l'on peut rencontrer dans le domaine du génie électrique, on parle alors de signaux discrets.

1. DEFINITIONS ET REPRESENTATION GRAPHIQUE

1.1. Définition

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $u_n = \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \to u_n \end{cases}$

On utilise plus souvent $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour désigner la suite dans son ensemble et u_n pour désigner l'image de l'entier n, encore appelé n$^{\text{ème}}$ terme de la suite.

1.2. Mode de définition d'une suite

Les suites numériques sont généralement définies selon deux modes :

- Soit u_n est donné directement en fonction de n ; on parle de définition explicite.

- Soit u_n est donné en fonction des k termes précédents ; on parle de définition par récurrence (ou implicite) d'ordre k. Dans ce cas, il est nécessaire de connaître les k valeurs initiales.

1.3. Représentation graphique

1.3.1. Suite définie de façon explicite $u_n = f(n)$

Pour la définition explicite : $u_n = f(n)$; tracer $f(x)$ et faire une représentation graphique de la suite sous forme de bâtons pour les premières valeurs de n.

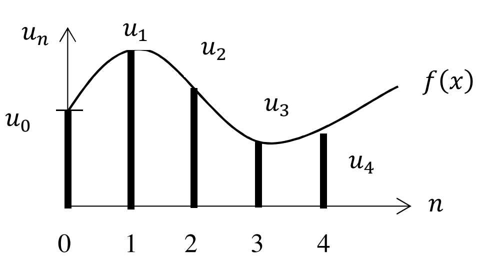

Figure 1. Suite définie de façon explicite

1.3.2. Suite défini de façon implicite $u_n = f(u_{n-1}; u_{n-2}; \dots; u_{n-k})$

Pour la définition par récurrence : $u_n = f(u_{n-1}; u_{n-2}; \dots; u_{n-k})$,

- Cas général : calculer les premiers termes et faire une représentation graphique de la suite sous forme de bâtons pour les premières valeurs de n.

- Cas particulier, $u_n = f(u_{n-1})$: on va faire une représentation graphique dans un repère $(u_n\,; u_n)$. Tracer la droite d'équation $y = x$; tracer la fonction $y = f(x)$.

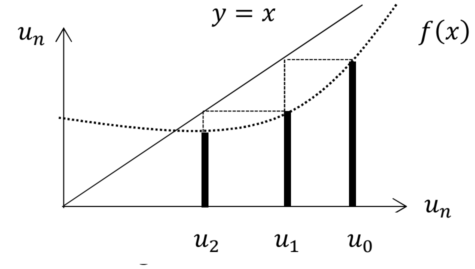

Figure 3. Suite définie par $\boldsymbol{u_n = f(u_{n-1})}$

<u>Algorithme</u> :

i = premier indice de la suite

Pour les premiers indices de la suite

Partir de u_i , aller chercher *verticalement* la courbe de f

puis *horizontalement* la droite $y = x$: vous obtenez u_{i+1}.

FinPour

1.4. Suites de références

1.4.1. Suite de Dirac

La suite de Dirac (δ_n) est définie par : $\delta_n = \begin{cases} \delta_0 = 1 \\ \delta_n = 0 \;\; si\ n \geq 1 \end{cases}$

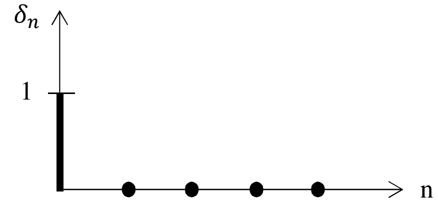

Figure 4. Dirac

1.4.2. Suite « échelon unité »

La suite échelon unité (U_n) est définie par : $U_n = 1 \;\; si\, n \geq 0$.

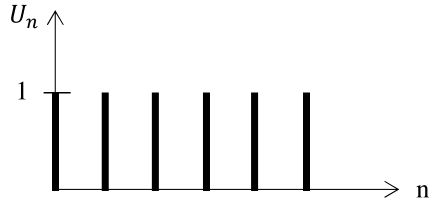

Figure 5. Echelon unité

1.4.3. Suite arithmétique

La suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme a est définie par :

$$u_n = \begin{cases} u_0 = a \\ u_n = u_{n-1} + r \quad si\, n \geq 1 \end{cases}$$

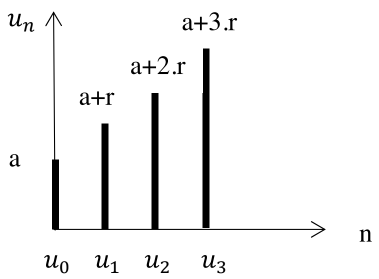

Figure 6. Suite arithmétique

Propriété : si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme a alors on peut écrire la définition implicite de la suite (u_n) :

$$u_n = \begin{cases} u_0 = a \\ u_n = u_0 + n.r \quad si\, n \geq 1 \end{cases}$$

Somme des premiers termes d'une suite arithmétique : si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme a alors la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n) est :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{p=0}^{n} u_p = \frac{(u_0 + u_n).(n+1)}{2}$$

1.4.4. Suite géométrique

La suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme a est définie par :

$$u_n = \begin{cases} u_0 = a \\ u_n = q.u_{n-1} \quad si\, n \geq 1 \end{cases}$$

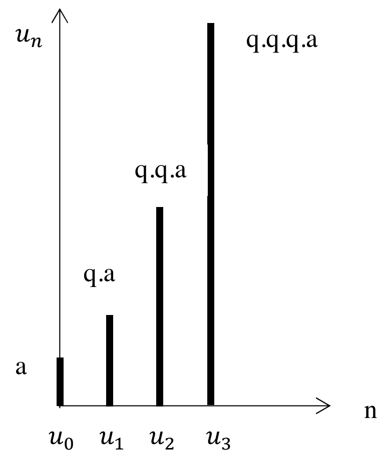

Figure 7. Suite géométrique

Propriété : si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme a alors on peut écrire la définition implicite de la suite (u_n) :

$$u_n = \begin{cases} u_0 = a \\ u_n = u_0 . q^n \quad si\ n \geq 1 \end{cases}$$

Somme des premiers termes d'une suite géométrique: si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme a alors la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n) est :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{p=0}^{n} u_p = \frac{(1-q^{n+1})}{(1-q)}.u_0$$

Exercice 1

1.4.5. Suite récurrentes linéaires d'ordre 1

On appelle suite récurrente linéaire d'ordre 1 (ou suite arithmético-géométrique) de raisons q et r, et de premier terme a toute suite (u_n) telle que : $u_n = \begin{cases} u_0 = a \\ u_n = q.u_{n-1} + r \quad si\ n \geq 1 \end{cases}$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$

Cas particuliers :

- si $q = 1$ et $r \in \mathbb{R}^*$, on obtient la suite suivante :

  $u_n = \begin{cases} u_0 = a \\ u_n = u_{n-1} + r \quad si\ n \geq 1 \end{cases}$, il s'agit d'une suite arithmétique.

- si $r = 0$ et $q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, on obtient la suite suivante :

$$u_n = \begin{cases} u_0 = a \\ u_n = q.u_{n-1} \quad si\ n \geq 1 \end{cases}$$, il s'agit d'une suite géométrique.

1.4.6. Suite récurrentes linéaires d'ordre 2

On appelle suite récurrente linéaire d'ordre 2 toute suite (u_n) telle que :

$$u_n = \begin{cases} u_0\ et\ u_1\ données \\ u_n = \alpha.u_{n-1} + \beta.u_{n-2} \quad si \quad n \geq 2 \end{cases} \qquad \text{avec } \alpha \neq 0$$

Propriété : Toute suite récurrente linéaire d'ordre 2 peut s'écrire comme combinaison linéaire de 2 suites.

Passage à l'écriture implicite : On appelle équation caractéristique associée à une suite récurrente linéaire d'ordre 2, l'équation suivante : $s^2 - a.s - b = 0$: (1).

- $\Delta = 0$: $u_n = (\lambda_1 + \lambda_2.n).s^n$, avec s racine réelle double de (1) ;
- $\Delta > 0$: $u_n = \lambda_1.s_1{}^n + \lambda_2.s_2{}^n$, avec s_1 et s_2 racines réelles de (1) ;
- $\Delta < 0$: $u_n = \rho^n.(\lambda_1.\cos(n.\theta) + \lambda_2.\sin(n.\theta))$, avec $s_1 = \rho.e^{j.\theta}$ et $s_2 = \rho.e^{-j.\theta}$, racines complexes de (1) ;

Dans les 3 cas, les deux paramètres λ_1 et λ_2 sont déterminés à partir des conditions initiales.

Exercice 2

2. CONVERGENCE D'UNE SUITE

2.1. Définition et théorème

2.1.1. Définition

Une suite (u_n) est convergente de limite L, si $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = L$. Si L est infini ou n'existe pas, la suite est dite divergente.

2.1.2. Théorème

Si une suite (u_n) admet une limite alors cette limite est unique.

2.2. Suites de références

- Pour tout réel α tel que $\alpha > 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge vers 0 ;
- Pour tout réel α tel que $\alpha > 0$, la suite $\left(n^\alpha\right)$ diverge vers $+\infty$;
- Pour tout réel q tel que $|q| < 1$, la suite $\left(q^n\right)$ converge vers 0 ;
- Pour tout réel q tel que $|q| \geq 1$, la suite $\left(q^n\right)$ diverge.

2.3. Définitions et vocabulaires

✓ Une suite u_n est *majorée* si, pour tout n, on a $u_n \leq M$;
✓ Une suite u_n est *minorée* si, pour tout n, on a $u_n \geq m$;
✓ Une suite u_n est *bornée* si, pour tout n, on a $m \leq u_n \leq M$;
✓ Une suite u_n est *croissante* si, pour tout n, on a $u_n \leq u_{n+1}$;
✓ Une suite u_n est *décroissante* si, pour tout n, on a $u_n \geq u_{n+1}$;
✓ Une suite croissante ou décroissante est dite *monotone* ;
✓ Une suite u_n est *alternée* si, pour tout n, on a $u_n.u_{n+1} \leq 0$.

2.4. Etude de la monotonie d'une suite

2.4.1. Suite définie de façon implicite $u_n = f(n)$

Si $u_n = f(n)$:

- Si f est croissante, alors u_n est croissante ;
- Si f est décroissante, alors u_n est décroissante ;

2.4.2. Suite définie de façon explicite $u_{n+1} = f(u_n)$

Si $u_{n+1} = f(u_n)$

- Si f est croissante et $u_1 > u_0$, alors u_n est croissante ;
- Si f est croissante et $u_1 < u_0$, alors u_n est décroissante ;
- (Dans les autres cas, on ne peut pas conclure).

2.4.3. Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors u_n est croissante ;
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors u_n est décroissante ;

2.4.4. Etudier le rapport de u_{n+1} / u_n et le comparer avec 1

- Si $u_{n+1} / u_n \geq 1$ alors u_n est croissante ;
- Si $u_{n+1} / u_n \leq 1$ alors u_n est décroissante ;

Exercice 3

2.5. Théorème sur la convergence

✓ Toute suite croissante et majorée est convergente.
✓ Toute suite décroissante et minorée est convergente.
✓ Toute suite monotone et bornée est convergente.

Exercice 4

3. LIMITE D'UNE SUITE

3.1. Opération sur les limites

Soient deux suites u_n et v_n convergentes, de limite respective L et L' , alors :

- $(u_n + v_n)$ est convergente, de limite L+L' ;
- $\lambda.u_n$, (avec λ réel) est convergente, de limite $\lambda.L$;
- $(u_n.v_n)$, est convergente, de limite L.L' ;
- (u_n / v_n), est convergente, de limite L/L' , sous réserve que $L' \neq 0$.

Exercice 5

3.2. Théorème des gendarmes

Si deux suites u_n et v_n sont convergentes vers une même limite L, et si à partir d'un certain rang *n*, on a $u_n \leq w_n \leq v_n$, alors la suite w_n est convergente de limite L.

3.3. A partir de la définition explicite

Si $u_n = f(n)$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right) = L$ alors $\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_n\right) = L$.

Exercice 6

3.4. A partir de la définition implicite (d'ordre 1) : théorème du point fixe

Soit $u_n = f(u_{n-1})$ et $u_0 \in [a,b]$.

Théorème du point fixe :

- si pour $x \in]a,b[$, $|f'(x)| < 1$;

- si pour $x \in [a,b]$, $f(x) \in [a,b]$;

Alors u_n est convergente vers L, solution unique de l'équation $f(x) = x$ dans $[a,b]$.

Exercice 7

3.5. Les suites adjacentes

3.5.1. Définition

Deux suites u_n et v_n sont adjacentes, si et seulement si :

- L'une est croissante, l'autre est décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_n - v_n\right) = 0$

3.5.2. Théorème

Deux suites u_n et v_n adjacentes sont convergentes et ont la même limite L.

Exercice 8