# Jour n$^o$1

## Exercice 1.1

**1)** *Question de cours* : énoncer le théorème de réduction des matrices symétriques réelles.

**2)** Soit $A$ un matrice symétrique réelle d'ordre $n \geqslant 2$, ayant pour plus grande valeur propre en valeur absolue $\lambda_{max}(A)$. Montrer que :

$$|\lambda_{max}(A)| = \max\left\{\left|\frac{< Ax, x >}{< x, x >}\right|, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}\right\} = \max\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}\right\}$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ issue du produit scalaire $< ., . >$.

**3)** Soit $A$ et $B$ deux matrices symétriques réelles d'ordre $n$ dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. Soit $\alpha \geqslant 0$. On pose :

$$M = (I - \alpha A)(I + \alpha A)^{-1}, \quad N = (I - \alpha B)(I + \alpha B)^{-1}$$

où $I$ désigne la matrice identité d'ordre $n$.
Déterminer les valeurs propres des matrices $M$ et $N$ en fonction de celles de $A$ et $B$. Montrer en particulier que ces valeurs propres sont toutes réelles et de valeur absolue inférieure ou égale à 1.

**4)** On considère la matrice $P = MN$. Montrer que les valeurs propres complexes de la matrice $P$ sont toutes de module inférieur ou égal à 1.

**5)** Trouver un exemple en dimension 2 de deux matrices quelconques ayant des valeurs propres de module inférieur ou égal à 1 et dont le produit ne vérifie pas cette propriété.

## Exercice 1.2

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de même loi. On suppose qu'il existe deux réels $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ tels :

$$P(X_1 > x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{x^\lambda}.$$

Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\text{pour tout } n \geqslant 1, \quad Z_n = n^{-\frac{1}{\lambda}} \max(X_1, \ldots, X_n)$$

converge en loi vers une loi à déterminer.

## Énoncé

**1)** *Question de cours* : énoncer le théorème de réduction des matrices symétriques réelles.

**2)** Soit $A$ un matrice symétrique réelle d'ordre $n \geqslant 2$, ayant pour plus grande valeur propre en valeur absolue $\lambda_{max}(A)$. Montrer que :

$$|\lambda_{max}(A)| = \max\left\{\left|\frac{< Ax, x >}{< x, x >}\right|, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}\right\} = \max\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}\right\}$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ issue du produit scalaire $< ., . >$.

**3)** Soit $A$ et $B$ deux matrices symétriques réelles d'ordre $n$ dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. Soit $\alpha \geqslant 0$. On pose :

$$M = (I - \alpha A)(I + \alpha A)^{-1}, \quad N = (I - \alpha B)(I + \alpha B)^{-1}$$

où $I$ désigne la matrice identité d'ordre $n$.
Déterminer les valeurs propres des matrices $M$ et $N$ en fonction de celles de $A$ et $B$. Montrer en particulier que ces valeurs propres sont toutes réelles et de valeur absolue inférieure ou égale à 1.

**4)** On considère la matrice $P = MN$. Montrer que les valeurs propres complexes de la matrice $P$ sont toutes de module inférieur ou égal à 1.

**5)** Trouver un exemple en dimension 2 de deux matrices quelconques ayant des valeurs propres de module inférieur ou égal à 1 et dont le produit ne vérifie pas cette propriété.

## Analyse stratégique de l'énoncé

Cet exercice difficile est consacré à l'étude des valeurs propres des matrices symétriques réelles. On y retrouve les notions de produit scalaire, de norme mais ce sujet pourrait conduire le candidat bien plus loin car il touche à des notions qui ne sont pas au programme des ECS mais représentent de grands classiques mathématiques : la notion de rayon spectral d'une matrice et de quotient de Rayleigh.

> Rapport du jury 2008
>
> Beaucoup trop de candidats éprouvent des difficultés face à l'abstraction des sujets d'algèbre linéaire ou bilinéaire.

**1)** Question de cours classique ; on veillera à la précision de la réponse. Il s'agit ici de diagonaliser des matrices symétriques *réelles*. Il va sans dire que lorsqu'on parle de matrices orthogonales, on doit être capable d'en donner aussi une définition précise.

$\hookrightarrow$ On pourra même reprendre mot à mot ce qui est écrit dans le programme officiel pour répondre à cette question !

**2)** Ne pas se laisser effrayer par la lourdeur des notations utilisées dans cette question. $A$ admet au moins une valeur propre et puisqu'elle est symétrique réelle, toutes ses valeurs propres sont réelles. On peut s'appuyer sur la question de cours pour justifier l'existence d'une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée des vecteurs propres de $A$ ; puis en identifiant, comme cela est usuel, les éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ aux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, décomposer naturellement tout vecteur $x$ de $\mathbb{R}^n$ dans cette base.

> Rapport du jury 2007
>
> L'utilisation d'une base orthonormée dans un espace euclidien est un réflexe peu courant.

On montrera clairement que le majorant trouvé appartient à l'ensemble :

$$\left\{ \left| \frac{< Ax, x >}{< x, x >} \right|, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \right\}.$$

$\hookrightarrow$ On veillera à ne pas confondre majorant (ce qu'on obtiendra en première instance) et maximum.

**3)** On commencera par justifier que les matrices $I + \alpha A$ et $I + \alpha B$ sont inversibles pour légitimer l'existence des matrices $M$ et $N$. On peut dans ce contexte montrer qu'elles n'admettent pas 0 comme valeur propre (on rappelle que $\alpha \geqslant 0$ et que les valeurs propres de $A$ et de $B$ sont positives ou nulles).
Pour déterminer les valeurs propres de $M$, il est particulièrement intéressant de remarquer que les valeurs propres de $A$ sont aussi celles de toute matrice semblable à $A$.

$\hookrightarrow$ On se souviendra que les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses coefficients diagonaux !

**4)** La question est plus compliquée car on s'intéresse maintenant aux valeurs propres complexes de la matrice $P = MN$. On peut remarquer que la matrice $P$ est aussi une matrice à coefficients réels (puisque $M$ et $N$ le sont).
On pourra exploiter le résultat obtenu à la question 2) pour une matrice symétrique réelle (à condition d'avoir prouvé que les matrices $M$ et $N$ sont symétriques réelles).

$\hookrightarrow$ Il s'agit sans aucun doute de la question la plus difficile du sujet. Le jour du concours, il ne faut pas ≪ bloquer ≫ sur elle pendant la demi-heure de préparation. Elle fera partie des questions pour lesquelles le jury pourra aider le candidat.

**5)** On aura tout intérêt à proposer des matrices triangulaires pour pouvoir obtenir leurs valeurs propres de manière immédiate par lecture de la diagonale.

$\hookrightarrow$ Cette question ne pose pas de difficulté.

## Corrigé

**1)** *Théorème de réduction des matrices symétriques réelles*
Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$A$ est symétrique si, et seulement si, il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que ${}^tQAQ$ soit diagonale.
Par conséquent, toute matrice $A$ symétrique réelle est $\mathbb{R}$-diagonalisable puisqu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = QD{}^tQ.$$

On rappelle qu'une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale lorsque ${}^tQQ = I$ où $I$

désigne la matrice identité d'ordre $n$.
Autrement dit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque $Q$ est inversible et $Q^{-1} = {}^tQ$.
On rappelle aussi qu'une matrice carrée est orthogonale si, et seulement si, c'est la matrice d'un changement de base(s) orthonormée(s).

**2)** Soit $A$ un matrice symétrique réelle d'ordre $n \geqslant 2$. On sait que la matrice $A$ admet un nombre fini de valeurs propres et que celles-ci sont réelles. On note $\lambda_{max}(A)$ sa plus grande valeur propre en valeur absolue.

$\hookrightarrow$ Le réel $|\lambda_{max}(A)|$ est appelé rayon spectral de la matrice $A$.
D'après le rappel de la question précédente, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de l'endomorphisme canoniquement associé à $A$.
On note $(e_1, \ldots, e_n)$ cette base et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i$ la valeur propre associée à $e_i$ (les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n'étant pas nécessairement distincts).
Soit $x$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Par unicité de la décomposition sur une base, il existe un unique $n$-uplet de réels non tous nuls $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tel que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

On en déduit que $Ax = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i e_i$ et puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée :

$$< Ax, x >= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2.$$

Ainsi, sachant que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_i| \leqslant |\lambda_{max}(A)|$ et que $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$, en utilisant l'inégalité triangulaire, il vient :

$$| < Ax, x > | \leqslant |\lambda_{max}(A)| \|x\|^2$$

Pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on peut alors écrire, en divisant par $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ qui est strictement positif :

$$\left| \frac{< Ax, x >}{< x, x >} \right| \leq |\lambda_{max}(A)|.$$

Ainsi $|\lambda_{max}(A)|$ est un majorant de l'ensemble $\left\{ \left| \dfrac{< Ax, x >}{< x, x >} \right|, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}$.
Et ce majorant est en fait un maximum.
En effet, ce majorant est élément de cet ensemble ; pour le prouver, il suffit de considérer un vecteur propre $x_0$ (non nul donc) associé à la valeur propre $\lambda_{max}(A)$ :

$$\langle Ax_0, x_0 \rangle = \langle \lambda_{max}(A) x_0, x_0 \rangle = \lambda_{max}(A) \langle x_0, x_0 \rangle.$$

Par conséquent :

$$\left| \frac{\langle Ax_0, x_0 \rangle}{\langle x_0, x_0 \rangle} \right| = |\lambda_{max}(A)|.$$

Ainsi :

$$\boxed{|\lambda_{max}(A)| = \max\left\{\left|\frac{< Ax, x >}{< x, x >}\right|, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash\{0\}\right\}.}$$

$\hookrightarrow$ L'application qui à tout vecteur non nul $x$ de $\mathbb{R}^n$ associe le réel $\dfrac{< Ax, x >}{< x, x >}$ est appelée quotient de Rayleigh associé à la matrice symétrique réelle $A$.

De même, sachant que $Ax = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i e_i$ et que $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée :

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \alpha_i^2.$$

Ainsi :

$$\|Ax\|^2 \leqslant (\lambda_{max}(A))^2 \|x\|^2.$$

Sachant que $x$ est non nul, on déduit que :

$$\frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} \leqslant (\lambda_{max}(A))^2$$

Et, puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ :

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant |\lambda_{max}(A)|.$$

Ainsi $|\lambda_{max}(A)|$ est un majorant de l'ensemble $\left\{\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash\{0\}\right\}$. Ce majorant est élément de cet ensemble, ce que l'on justifie en considérant un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_{max}(A)$. En conclusion :

$$\boxed{|\lambda_{max}(A)| = \max\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash\{0\}\right\}.}$$

$\hookrightarrow$ On détermine ainsi une norme matricielle $\mathcal{N}$ appelée norme subordonnée à la norme $\|.\|$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathcal{N}(M) = \max\left\{\frac{\|Mx\|}{\|x\|}, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash\{0\}\right\}.$$

On vient de voir que si $M$ est symétrique réelle, $\mathcal{N}(M) = |\lambda_{max}(M)|$. On pourrait montrer que, pour toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le rayon spectral de $M$ est inférieur ou égal à $\mathcal{N}(M)$.

**3)** Soit $A$ et $B$ deux matrices symétriques réelles d'ordre $n$ dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. Soit $\alpha \geqslant 0$. On pose :

$$M = (I - \alpha A)(I + \alpha A)^{-1}, \quad N = (I - \alpha B)(I + \alpha B)^{-1}$$

où $I$ désigne la matrice identité d'ordre $n$.

On commence par prouver que les matrices $M$ et $N$ sont bien définies.

On rappelle que $A$ est $\mathbb{R}$-diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Il existe une matrice orthogonale $Q$ et une matrice diagonale $D$ telle que :

$$A = QD^tQ.$$

Ainsi :

$$I + \alpha A = Q(I + \alpha D)^t Q.$$

On note $\lambda$ une valeur propre réelle de $A$ (qui existe puisque $A$ est une matrice symétrique réelle).
Comme les matrices $A$ et $D$ sont semblables, alors $\lambda$ est aussi valeur propre de $D$.
La matrice $I + \alpha D$ est diagonale et ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux ; par suite, $1 + \alpha\lambda$ est une valeur propre de $I + \alpha D$ donc de $I + \alpha A$ (puisque ces deux dernières matrices sont elles aussi semblables).

Or, par hypothèse, $\alpha \geqslant 0$ et les valeurs propres de $A$ sont positives ou nulles. Par conséquent les valeurs propres de $I + \alpha A$ sont toutes supérieures ou égales à 1.

0 n'est pas valeur propre de $I + \alpha A$ qui est donc inversible (de même pour $I + \alpha B$).
Les matrices $M$ et $N$ sont donc bien définies. On cherche maintenant leurs valeurs propres en fonction de celles de $A$ et de $B$.

Sachant que $I + \alpha A = Q(I + \alpha D)^t Q$ alors :

$$(I + \alpha A)^{-1} = (Q(I + \alpha D)^t Q)^{-1} = ({}^t Q)^{-1}(I + \alpha D)^{-1} Q^{-1} = Q(I + \alpha D)^{-1t} Q.$$

Et puisque $M = (I - \alpha A)(I + \alpha A)^{-1}$, on a alors :

$$M = Q(I - \alpha D)(I + \alpha D)^{-1t} Q.$$

Sachant que $I + \alpha D$ est diagonale, son inverse aussi et $(I - \alpha D)(I + \alpha D)^{-1}$ est diagonale en tant que produit de deux matrices diagonales.
On en déduit que $M$ est symétrique puisque $Q$ est orthogonale et ${}^t QMQ$ est diagonale (voir question 1). Par conséquent les valeurs propres de $M$ sont toutes réelles.

$\hookrightarrow$ Pour justifier que $M$ est symétrique, on pouvait également remarquer que l'inverse de la matrice $I + \alpha A$ s'écrit comme polynôme en $I + \alpha A$ et puisque $I$ et $A$ commutent alors $I - \alpha A$ commute avec toute puissance de $I + \alpha A$ donc avec $(I + \alpha A)^{-1}$.
Ainsi $I - \alpha A$ et $(I + \alpha A)^{-1}$ sont symétriques et commutent donc leur produit égal à $M$ est symétrique. De même pour $N$.

Les valeurs propres de $M$ sont celles de $(I - \alpha D)(I + \alpha D)^{-1}$ (puisque ces matrices sont semblables).
En notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $A$ (non nécessairement distinctes) qui sont aussi les valeurs propres de $D$, la matrice $I - \alpha D$, diagonale, admet pour valeurs propres ses éléments diagonaux : $1 - \alpha\lambda_1, \ldots, 1 - \alpha\lambda_n$.

De même les valeurs propres de $I + \alpha D$ sont $1 + \alpha\lambda_1, \ldots, 1 + \alpha\lambda_n$ toutes non nulles donc les valeurs propres de $(I + \alpha D)^{-1}$ sont :

$$\frac{1}{1 + \alpha\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{1 + \alpha\lambda_n}.$$

On en déduit que les valeurs propres de la matrice diagonale $(I - \alpha D)(I + \alpha D)^{-1}$, donc celles de $M$, sont ses éléments diagonaux :

$$\frac{1 - \alpha\lambda_1}{1 + \alpha\lambda_1}, \ldots, \frac{1 - \alpha\lambda_n}{1 + \alpha\lambda_n}.$$

Et sachant que, par hypothèse, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$ et $\alpha \geqslant 0$ alors :

$$-1-\lambda_i\alpha \leqslant 1-\lambda_i\alpha \leqslant 1+\lambda_i\alpha.$$

Par conséquent, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|1-\lambda_i\alpha| \leqslant 1+\lambda_i\alpha$ donc, sachant que $1+\lambda_i\alpha > 0$ :

$$\left|\frac{1-\lambda_i\alpha}{1+\lambda_i\alpha}\right| \leqslant 1.$$

Le calcul étant similaire pour les valeurs propres de $N$, on déduit que :

$$\boxed{\text{les spectres de } M \text{ et de } N \text{ sont inclus dans } [-1,1].}$$

**4)** On considère la matrice $P = MN$. Puisque $M$ et $N$ sont éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Sachant que $N$ et $M$ sont symétriques (cela a été prouvé à la question précédente), en utilisant le résultat et les notations de la question 2), on a :

$$|\lambda_{max}(N)| = \max\left\{\frac{\|Nx\|}{\|x\|},\quad x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\right\}$$

et

$$|\lambda_{max}(M)| = \max\left\{\frac{\|Mx\|}{\|x\|},\quad x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\right\}.$$

On en déduit que si $x \in \mathbb{R}^n$ est tel que $Nx \neq 0$ alors $\dfrac{\|MNx\|}{\|Nx\|} \leqslant |\lambda_{max}(M)|$ donc :

$$\|Px\| \leqslant |\lambda_{max}(M)|\|Nx\| \leqslant |\lambda_{max}(M)||\lambda_{max}(N)|\|x\|.$$

Sachant, d'après la question précédente, que les valeurs propres de $M$ et de $N$ sont toutes réelles et de valeur absolue inférieure ou égale à 1, on déduit que $|\lambda_{max}(M)| \leqslant 1$ et $|\lambda_{max}(N)| \leqslant 1$ et par conséquent :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } Nx \neq 0,\ \|Px\| \leqslant \|x\|.$$

Bien sûr, ce résultat est encore valable si $Nx = 0$ puisque, dans ce cas, $Px = 0$.

$\hookrightarrow$ Attention on ne peut rien conclure ici : ce n'est pas parce que $M$ et $N$ sont symétriques que leur produit $P$ est symétrique donc on ne peut pas utiliser le résultat de la question 2). Afin d'anticiper une question du jury, on pourra se demander à quelle condition le produit de deux matrices symétriques est symétrique.

Soit $\lambda$ une valeur propre complexe de $P$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à cette valeur propre.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on pose $x_k = a_k + ib_k$ où $(a_k,b_k) \in \mathbb{R}^2$ et on note :

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Alors on a $Px = Pa + iPb$ et, sachant que $x$ est vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$ :

$$\lambda x = Pa + iPb.$$

Ainsi, en notant $P = (p_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$, on déduit que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ :

$$\lambda(a_k + ib_k) = \sum_{\ell=1}^{n} p_{k\ell}a_\ell + i\sum_{\ell=1}^{n} p_{k\ell}b_\ell.$$

On considère alors le module de chacun de ces nombres complexes.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ :

$$|\lambda|^2|a_k + ib_k|^2 = |\lambda|^2(a_k^2 + b_k^2).$$

Et sachant que $P$ est à coefficients réels :

$$\left|\sum_{\ell=1}^{n} p_{k\ell}a_\ell + i\sum_{\ell=1}^{n} p_{k\ell}b_\ell\right|^2 = \left(\sum_{\ell=1}^{n} p_{k\ell}a_\ell\right)^2 + \left(\sum_{\ell=1}^{n} p_{k\ell}b_\ell\right)^2.$$

Par conséquent, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ :

$$|\lambda|^2(a_k^2 + b_k^2) = \left(\sum_{\ell=1}^{n} p_{k\ell}a_\ell\right)^2 + \left(\sum_{\ell=1}^{n} p_{k\ell}b_\ell\right)^2.$$

En additionnant membre à membre pour $k$ variant de 1 à $n$ on déduit que :

$$|\lambda|^2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right) = \|Pa\|^2 + \|Pb\|^2.$$

Or on a montré précédemment que si $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Px\| \leqslant \|x\|$.
Sachant que $a$ et $b$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on déduit que :

$$\|Pa\|^2 \leqslant \|a\|^2 \quad \text{et} \quad \|Pb\|^2 \leqslant \|b\|^2.$$

Par conséquent :

$$|\lambda|^2(\|a\|^2 + \|b\|^2) \leqslant \|a\|^2 + \|b\|^2$$

et puisque $x$ est un vecteur propre de $P$ alors $\|a\|^2 + \|b\|^2 > 0$ (l'une au moins des coordonnées de $x$ est non nulle).

Ainsi $|\lambda|^2 \leqslant 1$ et puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors $|\lambda| \leqslant 1$.

En conclusion :

$$\boxed{\text{les valeurs propres complexes de } P \text{ sont toutes de module inférieur ou égal à 1.}}$$

$\hookrightarrow$ On pourrait aisément généraliser le résultat de cette question et montrer que si $M$ et $N$ sont symétriques réelles alors $|\lambda_{max}(MN)| \leqslant |\lambda_{max}(M)||\lambda_{max}(N)|$.

**5)** Le résultat de la question précédente nous incite à rechercher notre exemple avec deux matrices non symétriques. On peut considérer les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dont les spectres sont inclus dans $\{0,1\}$ et dont le produit $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ admet pour valeurs propres 2 et 0.

$\hookrightarrow$ Afin d'approfondir la notion de rayon spectral, on pourra traiter l'épreuve HEC 2011 voie scientifique.