# Fractions et quotients


## Quand on ne sait pas !

- Une fraction est un quotient de deux nombres entiers, dont le dénominateur est différent de zéro.

**EXEMPLE 1**

- $\dfrac{5}{7}$ est une fraction car $5$ et $7$ sont des nombres entiers.
- $\dfrac{1,5}{7}$ n'est pas une fraction car $1,5$ n'est pas un nombre entier.

- Les règles de calcul sur les fractions s'appliquent aux quotients de réels et également aux fonctions comportant des quotients, telles que $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-2}$, avec $x \neq 2$.

  La maîtrise du calcul fractionnaire est par conséquent indispensable pour réussir en mathématiques.

## Que faire ?

- **Simplifier une fraction**, c'est trouver une fraction égale dont le dénominateur est plus petit. Quand on ne peut plus simplifier, on dit que la fraction est irréductible. Pour simplifier, on se sert de la propriété suivante :

> Pour tous réels $a, b, k$ (avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$), $\dfrac{ka}{kb} = \dfrac{a}{b}$.

Ainsi, avant de simplifier un quotient, on factorise le numérateur et le dénominateur par un facteur commun.

**EXEMPLE 2** Simplifier $\dfrac{63}{45}$ puis $\dfrac{2x-2}{x^2-1}$ (pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$).

**SOLUTION**

- $\dfrac{63}{45} = \dfrac{9 \times 7}{9 \times 5} = \dfrac{7}{5}$. On dit qu'on a simplifié par 9.
- $\dfrac{2x-2}{x^2-1} = \dfrac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{2}{x+1}$. On dit qu'on a simplifié par $(x-1)$.

Pour **additionner ou soustraire deux quotients de même dénominateur**, on ajoute uniquement les numérateurs en gardant le dénominateur commun.

Pour tous réels $a$ et $b$, pour tout réel $c \neq 0$,

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

**EXEMPLE 3**

- $\dfrac{5}{9} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{5+2}{9} = \dfrac{7}{9}$
- $\dfrac{15}{11} - \dfrac{12}{11} = \dfrac{15-12}{11} = \dfrac{3}{11}$

Pour **additionner ou soustraire deux quotients de dénominateurs différents**, on peut appliquer les propriétés suivantes :

Pour tous nombres réels $a$ et $b$, pour tous nombres réels $c \neq 0$ et $d \neq 0$,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$$

**EXEMPLE 4** Calculer $\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{7}$ puis $\dfrac{5}{x} - \dfrac{2}{x-3}$ (pour $x \neq 0$ et $x \neq 3$).

**SOLUTION**

- $\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{7} = \dfrac{4 \times 7}{5 \times 7} + \dfrac{5 \times 3}{5 \times 7} = \dfrac{28}{35} + \dfrac{15}{35} = \dfrac{28+15}{35} = \dfrac{43}{35}$.

Dans cette somme, on a remplacé $\frac{4}{5}$ et $\frac{3}{7}$ respectivement par $\frac{28}{35}$ et $\frac{15}{35}$. Ces deux derniers quotients ont le même dénominateur qui est 35. On dit alors que $35$ est un **dénominateur commun** à $\frac{4}{5}$ et $\frac{3}{7}$ et qu'on a **réduit au même dénominateur** les deux quotients $\frac{4}{5}$ et $\frac{3}{7}$.

Pour déterminer un dénominateur commun à deux quotients, le plus rapide est de calculer le produit de leurs dénominateurs respectifs, ce qu'on a réalisé dans l'exemple en calculant $5\times 7=35$. Comme nous le verrons dans les conseils, ce n'est pas toujours la méthode la plus judicieuse.

- Pour $x\neq 0$ et $x\neq 3$,

$$\frac{5}{x}-\frac{2}{x-3}=\frac{5(x-3)}{x(x-3)}-\frac{2x}{x(x-3)}=\frac{5(x-3)-2x}{x(x-3)}=\frac{5x-15-2x}{x(x-3)}=\frac{3x-15}{x(x-3)}.$$

■ Pour **multiplier deux quotients**, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

> Pour tous réels $a$ et $b$, pour tous réels $c\neq 0$ et $d\neq 0$, $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$.

**EXEMPLE 5**

- $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{3\times 5}{4\times 7}=\frac{15}{28}$
- $\frac{5}{x}\times\frac{x-2}{3}=\frac{5(x-2)}{3x}=\frac{5x-10}{3x}$ $(x\neq 0)$

■ **L'inverse du quotient** $\frac{a}{b}$ (avec $a\neq 0$ et $b\neq 0$) est le quotient $\frac{b}{a}$.

Il suffit d'inverser les places du numérateur et du dénominateur.

L'inverse du réel $b\neq 0$ est $\frac{1}{b}$ car $b=\frac{b}{1}$.

- **Diviser par un quotient**, c'est multiplier par son inverse.

> Pour tout réel $a$, pour tous réels $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$, on a :
> $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

**Cas particuliers** :

- $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{bc}$
- $\dfrac{a}{\frac{c}{d}} = a \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{c}$

**EXEMPLE 6**

- $\dfrac{13}{\frac{3}{4}} = 13 \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{13 \times 4}{3} = \dfrac{52}{3}$
- $\dfrac{\frac{3}{x+1}}{5} = \dfrac{\frac{3}{x+1}}{\frac{5}{1}} = \dfrac{3}{x+1} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{5(x+1)}$

## Conseils

- Calculer le produit des dénominateurs de deux quotients n'est pas forcément la méthode la plus judicieuse pour déterminer un dénominateur commun à ces deux quotients.

**EXEMPLE 7** Déterminer un dénominateur commun à $\dfrac{7}{100}$ et $\dfrac{11}{150}$.

Le premier dénominateur qui vient à l'esprit est $100 \times 150 = 15000$ qui va nous amener à effectuer des calculs avec des très grands nombres !

Alors qu'il y a bien plus simple si on observe que $100 \times 3 = 300 = 150 \times 2$ .

Ainsi $300$ est un dénominateur commun à $\dfrac{7}{100}$ et $\dfrac{11}{150}$.

Pour réduire au même dénominateur $\dfrac{7}{100}$ et $\dfrac{11}{150}$, on effectue les calculs suivants : $\dfrac{7}{100}=\dfrac{7\times 3}{100\times 3}=\dfrac{21}{300}$ et $\dfrac{11}{150}=\dfrac{11\times 2}{150\times 2}=\dfrac{22}{300}$.

- Avant de multiplier deux quotients, il est, si possible, plus astucieux de simplifier.

**EXEMPLE 8** $\dfrac{21}{8}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{7\times 3\times 4}{4\times 2\times 3}=\dfrac{7}{2}$.

Comme dans le deuxième quotient, 3 et 4 sont des facteurs communs du numérateur et du dénominateur, on peut simplifier par 3 et par 4.

On remarque aussi que dans cet exemple, on n'a pas eu à effectuer une seule multiplication, car on a commencé par simplifier !

- Avec de la pratique, il ne sera pas nécessaire d'écrire tous les calculs intermédiaires.

**EXEMPLE 9**

Au lieu d'écrire $\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{7}=\dfrac{2\times 7}{3\times 7}-\dfrac{5\times 3}{7\times 3}=\dfrac{14}{21}-\dfrac{15}{21}=\dfrac{14-15}{21}=-\dfrac{1}{21}$ on peut écrire directement en effectuant des calculs « de tête » :

$$\frac{2}{3}-\frac{5}{7}=\frac{14-15}{21}=-\frac{1}{21}$$

- Lorsque le résultat d'un calcul est une fraction, il est judicieux de chercher à la simplifier si possible, surtout si on utilise la fraction dans la suite de l'exercice.

- On ne développe généralement pas le dénominateur d'un quotient lorsqu'il est de la forme $(x+2)(x-3)$ par exemple.

## Exemples traités

Exprimer chaque expression à l'aide d'un seul quotient.

**1** $A=\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$

**2** $B=3x+\frac{2}{x-2}$

**3** $C=\frac{15}{28}\times\frac{21}{20}$

**4** $D=\frac{x}{\frac{2}{7}}$

**SOLUTION**

**1** $A=\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$.

$A=\frac{2\times 2}{3\times 2}+\frac{5}{6}=\frac{4}{6}+\frac{5}{6}$ : on a réduit au même dénominateur : $6$.

$A=\frac{9}{6}=\frac{3\times 3}{2\times 3}=\frac{3}{2}$ : on a calculé la somme et on a simplifié par $3$.

**2** $B=3x+\frac{2}{x-2}$ est défini pour $x\neq 2$.

$B=\frac{3x}{1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3x(x-2)+2}{x-2}$ : on a réduit au même dénominateur qui est $(x-2)$, c'est pour cela que le premier terme $3x$ a été multiplié par $(x-2)$.

$B=\frac{3x^2-6x+2}{x-2}$ : on a développé et on a réduit l'expression du numérateur.

**3** $C=\frac{15}{28}\times\frac{21}{20}$.

$C=\frac{5\times 3}{7\times 4}\times\frac{7\times 3}{5\times 4}$ : on a préparé la simplification avant de multiplier.

$C=\frac{3\times 3}{4\times 4}=\frac{9}{16}$ : on a simplifié par 5 et par 7 et on a effectué les produits qui restent.

**4** $D=\frac{x}{\frac{2}{7}}$.

$D=x\times\frac{7}{2}=\frac{7x}{2}$ : diviser par $\frac{2}{7}$ revient à multiplier par $\frac{7}{2}$.

## Exercices

**Exercice 3.1** Écrire sous forme de fractions irréductibles :

1. $A = \dfrac{0,3}{1,5}$

2. $B = \dfrac{4 \times 10^2}{8 \times 10^3}$

3. $C = \dfrac{7,5}{15}$

**Exercice 3.2** Écrire sous forme de fractions irréductibles :

1. $A = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{6}$

2. $B = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{18}$

3. $C = \dfrac{7}{30} - \dfrac{9}{20}$

4. $D = \dfrac{5}{4}\left(\dfrac{1}{10} - \dfrac{2}{3}\right)$

5. $E = 6 \times \dfrac{3}{4} - 5 \times \dfrac{7}{10}$

**Exercice 3.3** Exprimer chaque expression à l'aide d'un seul quotient.

1. $A = x + 2 + \dfrac{1}{x-3}$ $(x \neq 3)$

2. $B = \dfrac{x+2}{x-3} - \dfrac{x}{x-5}$ $(x \neq 3 \text{ et } x \neq 5)$

3. $C = \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{5}{x}$ $(x \neq -1 \text{ et } x \neq 0)$

4. $D = \dfrac{2}{1 + \dfrac{1}{x}}$ $(x \neq -1 \text{ et } x \neq 0)$

## Pour vous aider à démarrer

| | |
|---|---|
| **Exercice 3.1** | Pour $A$, multiplier numérateur et dénominateur par 10. |
| **Exercice 3.2** | Prendre les plus petits dénominateurs communs possibles. |
| **Exercice 3.3** | Ne pas oublier de respecter les règles de priorité. |

## Solutions des exercices

### Exercice 3.1

**1** $A=\dfrac{0,3}{1,5}=\dfrac{0,3\times 10}{1,5\times 10}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$.

**2** $B=\dfrac{4\times 10^2}{8\times 10^3}=\dfrac{4\times 10\times 10}{2\times 4\times 10\times 10\times 10}=\dfrac{1}{2\times 10}=\dfrac{1}{20}$.

**3** $C=\dfrac{7,5}{15}=\dfrac{7,5}{2\times 7,5}=\dfrac{1}{2}$.

### Exercice 3.2

**1** $A=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{9}{12}-\dfrac{2}{12}=\dfrac{7}{12}$.

**2** $B=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{18}=\dfrac{3}{36}+\dfrac{2}{36}=\dfrac{5}{36}$.

**3** $C=\dfrac{7}{30}-\dfrac{9}{20}=\dfrac{14}{60}-\dfrac{27}{60}=\dfrac{-13}{60}$.

**4** $D=\dfrac{5}{4}\left(\dfrac{1}{10}-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{5}{4}\left(\dfrac{3-20}{30}\right)=\dfrac{5}{4}\times\left(-\dfrac{17}{30}\right)=\dfrac{5}{4}\times\left(-\dfrac{17}{5\times 6}\right)=-\dfrac{17}{4\times 6}=-\dfrac{17}{24}$.

**5** $E=6\times\dfrac{3}{4}-5\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{6}{1}\times\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{1}\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{6\times 3}{4}-\dfrac{5\times 7}{10}=\dfrac{2\times 3\times 3}{4}-\dfrac{5\times 7}{5\times 2}$.

$E=\dfrac{9}{2}-\dfrac{7}{2}=\dfrac{2}{2}=1$.

### Exercice 3.3

**1** $A=x+2+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{(x+2)(x-3)+1}{x-3}=\dfrac{x^2+2x-3x-6+1}{x-3}=\dfrac{x^2-x-5}{x-3}$.

**2** $B=\dfrac{x+2}{x-3}-\dfrac{x}{x-5}=\dfrac{(x+2)(x-5)-x(x-3)}{(x-3)(x-5)}$.

$B=\dfrac{x^2-5x+2x-10-x^2+3x}{(x-3)(x-5)}=\dfrac{-10}{(x-3)(x-5)}$.

**3** $C=\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{5}{x}=\dfrac{x^2-5(x+1)}{x(x+1)}=\dfrac{x^2-5x-5}{x(x+1)}$.

**4** $D=\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{2}{\dfrac{x+1}{x}}=2\times\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{2x}{x+1}$.