Chapitre 2

Généralités sur les fonctions

Problématique

- Comment définir, utiliser et représenter une fonction ?

« *Est fonctionnelle pour Descartes, une relation qui permet de faire correspondre à une longueur donnée une autre longueur déduite de la première par un nombre fini d'opérations algébriques.* »

Jules Vuillemin – (1920-2001)

Points incontournables

- Définition d'une fonction
- Détermination d'images et d'antécédents
- Représentation graphique d'une fonction

Notion de fonction

Soit D un ensemble de nombres réels (intervalle ou réunion d'intervalles).

Définir une fonction f sur D, c'est associer à chaque nombre réel x de D un unique nombre réel y ou encore $f(x)$.

On note $f: x \mapsto y = f(x)$

- D est l'ensemble de définition de la fonction f.
- Le nombre x est la variable.
- Le nombre $f(x)$ est appelé l'image par la fonction f de x.
- Si $y = f(x)$ alors x est un antécédent de y par la fonction f.

À retenir

D est l'ensemble de définition de *f*

À retenir

Chaque nombre x de D a une unique image par f, notée $f(x)$.

À retenir

Chaque nombre y peut avoir **plusieurs, un seul ou aucun antécédent(s)** par f.

Représentation graphique d'une fonction

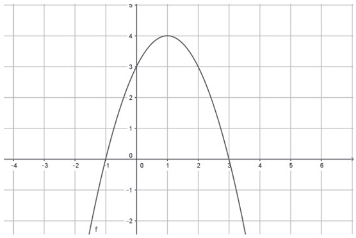
Soit f une fonction et D son ensemble de définition.

Dans un repère du plan, on appelle représentation graphique ou courbe représentative de f l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;f(x))$ où x est un nombre de D.

Cette courbe a pour équation $y = f(x)$.

Détermination d'images et d'antécédents

Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ et dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :



Déterminer l'image d'un nombre par une fonction f :

À retenir

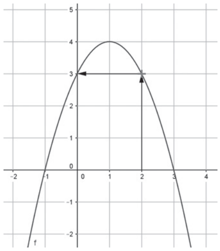
L'image de a **par** f est $f(a)$.
Déterminer une image revient à calculer $f(a)$.

Par le calcul

Pour déterminer l'image d'un nombre a par f, il suffit de remplacer x par a dans l'expression de la fonction, donc de calculer $f(a)$.

Exemple :

L'image de 2 par la fonction f est égale à $f(2) = -2^2 + 2 \times 2 + 3 = 3$



Graphiquement

Pour déterminer **l'image de 2** par *f*, on commence par repérer 2 sur l'axe des abscisses, puis on lit **l'ordonnée de l'unique point de la courbe d'abscisse 2**.

On peut lire que l'image de 2 par la fonction f est 3.

> **À retenir**
> Graphiquement,
> **l'image de a par** f est l'ordonnée du point de la courbe représentative de f d'abscisse a.

Déterminer le ou les antécédents éventuels d'un nombre par une fonction *f* :

Par le calcul

Pour déterminer le ou les antécédents d'un nombre b par f, il suffit de résoudre l'équation $f(x)=b$.

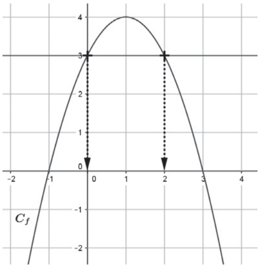
Exemple :

Résoudre $f(x)=4$ revient à chercher les antécédents éventuels de 4 par f. Avec la fonction f définie précédemment, $f(x)=4$ équivaut à $-x^2+2x+3=4$, c'est-à-dire $x^2-2x+1=0$, soit $(x-1)^2=0$ qui a pour solution $x=1$. 1 est l'unique antécédent de 4 par f.

> **À retenir**
> **Le ou les antécédents de b par** f sont les solutions de $f(x)=b$.
> Déterminer un ou plusieurs antécédents revient à résoudre une équation.

Graphiquement

Pour déterminer **le ou les antécédents éventuels de** 3 par f, on commence par repérer 3 sur l'axe des ordonnées, puis on trace la droite passant par le point $(0\ ;\ 3)$ parallèle à l'axe des abscisses.



Enfin, **on lit les abscisses des éventuels points d'intersection de cette droite avec la courbe.**

> **À retenir**
> Graphiquement,
> **le ou les antécédents éventuels de b par** f sont les abscisses du ou des points de la courbe représentative de f d'ordonnée b.
> En général, une lecture graphique ne donne qu'une valeur approchée sauf si le point considéré est sur un nœud du quadrillage comme le codage « + » l'indique.

Sur la courbe donnée ci-dessus, 0 et 2 sont les deux antécédents de 3 par la fonction f .

Montrer qu'un point appartient ou non à une courbe représentative

Pour vérifier si un point $M(a\ ;\ b)$ appartient à la courbe représentative d'une fonction f , notée C_f , on calcule $f(a)$ et on compare le résultat à b .

- Si $f(a)=b$ alors $M \in C_f$
- Si $f(a) \neq b$ alors $M \notin C_f$

Exemple :

Le point $A(1\ ;\ 4)$ appartient à la courbe représentative de f définie par $f(x)=-x^2+2x+3$, car $f(1)=-1^2+2\times1+3=4$.

En revanche, le point $B(-3\ ;7)$ n'appartient pas à cette courbe car $f(-3)=-9-6+3=-12 \neq 7$.

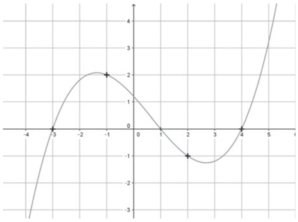
À retenir

si $f(a)=b$ alors $M(a;b) \in C_f$

Je prends des notes

Je me teste !

1. Déterminer l'image de -1 par la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=3(2x-1)^2$. Le point $A(2\,;18)$ appartient-il à la courbe représentative de g ?
2. Déterminer le ou les antécédents éventuels de -4 par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=5-3x$.
3. La courbe représentative d'une fonction k est donnée ci-dessous. Lire les images respectives de -1 et 2 par k et les éventuels antécédents de 0 par cette fonction.



Corrigés p. 280

Dernière minute

On définit une fonction sur un ensemble D lorsque, à chaque réel X de D, on associe un unique réel noté $f(x)$.

On note $f : x \mapsto y = f(x)$

Sa représentation graphique est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;f(x))$.

L'image de a par f est $f(a)$.

Le ou les antécédents de b par f sont les solutions de $f(x)=b$.

$M(a\,;b)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f si $f(a)=b$.

Je lis, je surfe !

- Réf : http://mathenpoche.sesamath.net/#2: rappels de cours et exercices d'application directe corrigés.

2 SAVOIR-FAIRE ET COMPÉTENCES

La méthode

Ce qu'en dit le programme

Il s'agit de connaître les notions d'image, d'antécédent, de courbe représentative.

Il faut être capable, pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule :

- d'identifier la variable et, éventuellement, l'ensemble de définition
- de déterminer l'image d'un nombre
- de rechercher des antécédents d'un nombre

Les fonctions abordées sont généralement des fonctions numériques d'une variable réelle pour lesquelles l'ensemble de définition est donné.

Savoir-faire

Savoir déterminer une image ou un antécédent :

- Pour la méthode graphique, il faut savoir repérer un point dans un plan (lire des coordonnées dans un repère).
- Pour la méthode algébrique, il faut savoir résoudre des équations et effectuer des calculs (substituer à x une valeur donnée).

Le conseil du prof

Il est important de faire le lien entre les calculs effectués, notamment pour déterminer une image ou un antécédent par une fonction donnée, et l'interprétation graphique que l'on peut en faire.

Ce lien permet, en particulier, de vérifier graphiquement ces calculs.

Ça peut tomber !

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-2x+5$

- Calculer l'image de $\frac{1}{2}$ par f.

  On remplace x par $\frac{1}{2}$ dans l'expression de f.

- Déterminer le ou les antécédents de 5 par f.

  On résout l'équation $f(x)=5$.

- Le point $A(-1\,;8)$ appartient-il à la courbe représentative de f ?

  On calcule $f(-1)$ et on le compare à 8.

Un exemple appliqué

En utilisant le calcul algébrique

f , g et h sont trois fonctions définies respectivement sur D_f , D_g et D_h par $f(x)=-2x+7$, $g(x)=3x^2-2x-5$ et $h(x)=\dfrac{2x}{x-5}$.

1. Vérifier que $D_f=\mathbb{R}$, $D_g=\mathbb{R}$ et $D_h=]-\infty\,;5[\cup]5\,;+\infty[$:
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, il est possible de calculer $-2x+7$ et $3x^2-2x-5$, donc on a bien $D_f=D_g=\mathbb{R}$. En revanche, le nombre 5 annule le dénominateur du quotient $\dfrac{2x}{x-5}$, il s'agit donc d'une valeur interdite pour ce quotient. D'où $D_h=]-\infty\,;5[\cup]5\,;+\infty[$.
2. Indiquer les fonctions pour lesquelles l'image de 2 est 3, puis pour lesquelles un antécédent de -3 est 3 .
   $f(2)=-2\times2+7=-4+7=3$
   $g(2)=3\times2^2-2\times2-5=3\times4-4-5=12-9=3$
   $h(2)=\dfrac{2\times2}{2-5}=\dfrac{4}{-3}\neq3$
   Donc l'image de 2 par les fonctions f et g est égale à 3 .
   Pour déterminer la ou les fonctions pour lesquelles un antécédent de -3 est 3 , on peut aussi calculer $f(3)$, $g(3)$ et $h(3)$:
   $f(3)=-2\times3+7=-6+7=1\neq-3$
   $g(3)=3\times3^2-2\times3-5=3\times9-6-5=27-11=16\neq-3$
   $h(3)=\dfrac{2\times3}{3-5}=\dfrac{6}{-2}=-3$. Donc h est la fonction cherchée.
3. Calculer $f(-1)$, $g\left(\sqrt{2}\right)$ et $h(0)$.
   Il s'agit là encore de calculer des images de nombres donnés par les fonctions f , g et h :
   $f(-1)=-2\times(-1)+7=2+7=9$
   $g\left(\sqrt{2}\right)=3\times\sqrt{2}^2-2\times\sqrt{2}-5=3\times2-2\sqrt{2}-5=1-2\sqrt{2}$
   $h(0)=\dfrac{2\times0}{0-5}=\dfrac{0}{-5}=0$
4. Déterminer l'image de 5 et l'antécédent de 11 par f :
   L'image de 5 par f est $f(5)=-2\times5+7=-10+7=-3$. Pour déterminer l'antécédent de 11 par f , on doit résoudre l'équation $f(x)=11$:
   $f(x)=11$ équivaut à $-2x+7=11$, soit $-2x=4$, c'est-à-dire $x=-2$. L'antécédent de 11 par f est donc -2 .
5. Traduire par une phrase chacune des égalités : $f(0)=7$, $f(6)=g(0)=-5$. Puis traduire par une égalité : « -1 est un

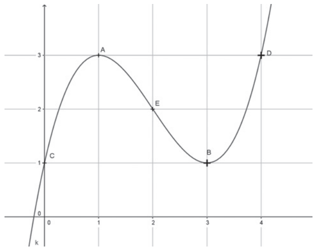
Je gagne des points !
Faire apparaitre les détails des calculs demandés et s'efforcer de justifier chacune des réponses.

antécédent de 0 par g » et « les images de -2 par f et g sont égales à 11 ».

- $f(0)=7$ signifie que l'image de 0 par f est 7 .
- $f(6)=g(0)=-5$ signifie que les images de 6 par f et de 0 par g sont égales à -5 .
- « -1 est un antécédent de 0 par g » se traduit par $g(-1)=0$
- « les images de -2 par f et g sont égales à 11 » se traduit par $f(-2)=g(-2)=11$.

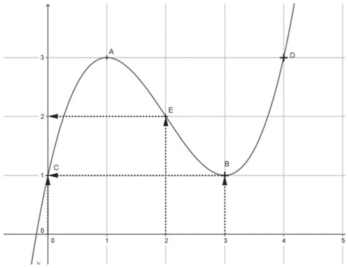
En utilisant la courbe représentative d'une fonction

Soit k une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_k est donnée ci-dessous :



1. Déterminer graphiquement l'image de 0, de 2 puis de 3 par k :

   Pour déterminer les images respectives de 0, 2 et 3 par k, on commence par repérer les nombres 0, 2 et 3 sur l'axe des abscisses, puis on lit les ordonnées des points de la courbe d'abscisses 0, 2 et 3.



On peut lire (voir construction en pointillés) que l'image de 0 par k est 1, celle de 2 est 2 et celle de 3 est 1.