Équations du second degré

Quand on ne sait pas !

- Vérifier qu'il s'agit d'une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels donnés et $a \neq 0$.

  Identifier clairement chacun des nombres a, b et c.

  EXEMPLE 1 Résoudre $3x^2 = 2x - 6$ équivaut à résoudre $3x^2 - 2x + 6 = 0$ avec $a = 3$, $b = -2$ et $c = 6$.

- Revoir la formule du discriminant Δ d'un polynôme du second degré et ce qui se déduit de son signe : l'existence et le nombre de solutions.

- Se souvenir que déterminer les racines du polynôme $ax^2 + bx + c$ revient à déterminer les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$.

  EXEMPLE 2 Les nombres 1 et $\dfrac{-1}{2}$ sont les racines du polynôme $2x^2 - x - 1$, en effet : $2 \times 1^2 - 1 - 1 = 0$ et $2 \times \left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{-1}{2}\right) - 1 = 0$.

- La factorisation d'un polynôme du second degré dépend de l'existence d'éventuelles racines.

Que faire ?

- Pour résoudre une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c réels et $a \neq 0$, on commence par calculer le discriminant Δ de $ax^2 + bx + c$:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- En fonction du signe de Δ, on donne le nombre et la valeur des solutions.

> Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes :
> $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
> Si $\Delta = 0$, alors $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
>
> Si $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution.

- La factorisation **éventuelle** d'un polynôme du second degré se déduit des calculs précédents :

> Si $\Delta > 0$, le polynôme se factorise et on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
>
> Si $\Delta = 0$, le polynôme se factorise et on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.
>
> Si $\Delta < 0$, le polynôme ne se factorise pas.

Conseil

S'assurer que le polynôme est bien ordonné avant d'affecter des valeurs aux coefficients a, b et c.

Exemples traités

- Résoudre l'équation : $x^2 - 5x + 6 = 0$.

  Le polynôme est bien ordonné, on peut lire : $a = 1$, $b = -5$ et $c = 6$.

  On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$.

  Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes :
  $$x_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} = 3$$
  L'ensemble des solutions est donc $S = \{2\,;\,3\}$.

- Résoudre l'équation $(x+1)^2 + 2 = -2x^2$.

  On se ramène à une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

  On a $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, et en remplaçant, on trouve que l'équation proposée équivaut à $x^2 + 2x + 1 + 2 = -2x^2$, ce qui donne : $3x^2 + 2x + 3 = 0$.

On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 3 \times 3 = -32$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution et on a : $S = \varnothing$.

Exercices

Exercice 1.1 Résoudre $-x^2 + x + 3 = 0$.

Exercice 1.2 Résoudre $2x - x^2 - 2 = 0$.

Exercice 1.3 Résoudre $(x+2)^2 - 5 = 2x(x+1)$.

Exercice 1.4 Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 15}$ admet $\mathbb{R} \setminus \{3 ; 5\}$ comme ensemble de définition.

Exercice 1.5 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x - 3}$$

Simplifier $f(x)$.

Exercice 1.6 Résoudre l'équation $(x+1)(x+2) + (x+3)(x+4) = (x+5)(x+6)$.

Exercice 1.7 On considère la fonction trinôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 4x + 5$$

1. La courbe représentative de f, notée P, coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Si c'est le cas, déterminer en quel(s) point(s).
2. On considère la droite D d'équation $y = x - 5$. Déterminer les éventuels points d'intersection de P et D.

Exercice 1.8 Le coût de fabrication de x objets est donné, en euros, par $C(x) = 0{,}5x^2 + 5x + 1048$, avec $x \geq 0$. Déterminer x pour que les coûts de fabrication s'élèvent à 3 700 €.

Exercice 1.9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+mx+m-1$, avec $m\in\mathbb{R}$. Déterminer m pour que $f(x)$ admette une seule racine réelle. Quelle est cette racine ?

Exercice 1.10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(m-1)x^2+2mx+1$, avec $m\in\mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de m, $f(x)$ est-il un polynôme du second degré ?
2. Considérons $m\neq 1$. Existe-t-il des valeurs de m telles que l'équation $f(x)=0$ admette une unique solution ?

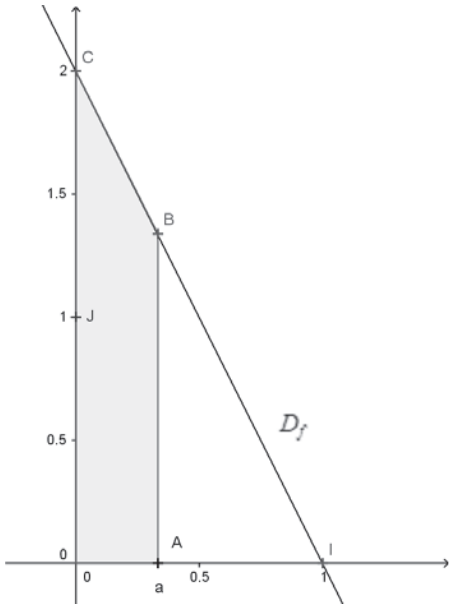
Exercice 1.11 Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x)=2-2x$.

On a tracé ci-contre la droite D_f représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé (O,I,J) du plan.

Le point C a pour coordonnées $(0\ ;2)$. On note Δ la partie du plan intérieure au triangle OIC.

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1 ; on note A le point de coordonnées $(a\ ;0)$ et B le point de D_f de coordonnées $(a\ ;f(a))$.

Déterminer la valeur exacte de a pour laquelle le segment $[AB]$ partage Δ en deux parties de même aire, puis en donner une valeur approchée au centième.



➲ Source : sujet posé au BAC ES 2015 juin – Asie.

Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.2	Penser à ordonner le polynôme avant d'identifier les coefficients a, b et c.
Exercice 1.3	On se ramène à une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$.
Exercice 1.4	Le dénominateur d'une fonction « quotient » ne doit pas être égal à 0.
Exercice 1.5	Pour simplifier $f(x)$, factoriser le numérateur et le dénominateur.
Exercice 1.6	On développe et réduit les deux membres pour se ramener à une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$.
Exercice 1.7	**1** Les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative d'une fonction f avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x)=0$. **2** Les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de f et g sont les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$.
Exercice 1.9	Que dire du signe du discriminant ?
Exercice 1.11	Il s'agit d'exprimer l'égalité des aires des deux parties concernées en fonction de a, c'est-à-dire les aires du trapèze rectangle $OABC$ et du triangle rectangle ABI.

Solutions des exercices

EXERCICE 1.1 Pour résoudre $-x^2+x+3=0$.

Le polynôme est bien ordonné, on peut lire : $a=-1$, $b=1$ et $c=3$.

On calcule le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times(-1)\times 3=13$.

Comme $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{-2}=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ et } x_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{-2}=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

On a donc $S=\left\{\frac{1+\sqrt{13}}{2}\ ;\ \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$.

EXERCICE 1.2 Résoudre $2x-x^2-2=0$

On ordonne les termes du polynôme $2x-x^2-2$. L'équation $2x-x^2-2=0$ équivaut à $-x^2+2x-2=0$. On peut lire : $a=-1$, $b=2$ et $c=-2$.

On calcule le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times(-1)\times(-2)=4-8=-4$

Comme $\Delta<0$, l'équation n'admet pas de solution donc $S=\varnothing$.

EXERCICE 1.3 Résoudre $(x+2)^2-5=2x(x+1)$.

On commence par écrire cette équation sous la forme $ax^2+bx+c=0$.

$(x+2)^2-5=2x(x+1)$ équivaut à $x^2+4x+4-5=2x^2+2x$

c'est-à-dire $-x^2+2x-1=0$. On a $\Delta=b^2-4ac=4-4=0$.

L'équation admet une unique solution $x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{-2}=1$ donc $S=\{1\}$.

(On peut aussi remarquer que $-x^2+2x-1$ se factorise. L'équation $-x^2+2x-1=0$ équivaut à $-(x-1)^2=0$. La solution $x=1$ devient ainsi évidente).

EXERCICE 1.4 Pour que la fonction f soit définie, il faut que $x^2-8x+15\neq 0$.

On cherche alors les valeurs de x telles que $x^2-8x+15=0$.

Pour cela, on calcule le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=8^2-4\times 15=64-60=4$.

Comme $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1=\frac{8+2}{2}=5 \text{ et } x_2=\frac{8-2}{2}=3$$

Comme 5 et 3 sont les deux valeurs qui annulent le dénominateur de la fonction f, on peut conclure que f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\ ;\ 5\}$.

Exercice 1.5 Pour que la fonction f soit définie, il faut que $x^2-2x-3 \neq 0$.

On cherche alors les valeurs de x telles que $x^2-2x-3=0$.

Pour cela, on calcule : $\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\times(-3)=16$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions : $x_1=-1$ et $x_2=3$.

On peut conclure que f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3;-1\}$.

Cherchons alors les racines de x^2+3x+2 : $\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\times 2=1$.

Donc les racines de x^2+3x+2 sont $x_1=-1$ et $x_2=-2$.

On peut factoriser le numérateur et le dénominateur : $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ et $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$. On trouve alors : $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{x+2}{x-3}$.

Exercice 1.6 Résoudre l'équation $(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)=(x+5)(x+6)$.

On commence par écrire cette équation sous la forme $ax^2+bx+c=0$.

Cela équivaut alors à : $x^2+3x+2+x^2+7x+12=x^2+11x+30$,

c'est-à-dire aussi : $x^2-x-16=0$.

Calculons le discriminant : $\Delta = 1-4\times1\times(-16)=65$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1=\frac{1-\sqrt{65}}{2} \text{ et } x_2=\frac{1+\sqrt{65}}{2}$$

On a donc $S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{65}}{2};\dfrac{1+\sqrt{65}}{2}\right\}$.

Exercice 1.7 Considérons $f(x)=-x^2+4x+5$.

1 Pour savoir si P, la courbe représentative de f, coupe l'axe des abscisses, on résout l'équation $-x^2+4x+5=0$.

On a $\Delta = 16-4\times(-1)\times5=36$.

Comme $\Delta>0$, alors P coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses : $x_1=\dfrac{-4-\sqrt{36}}{-2}=5$ et $x_2=\dfrac{-4+\sqrt{36}}{-2}=-1$, donc aux points de coordonnées $(5;0)$ et $(-1;0)$.

2 Pour déterminer les éventuels points d'intersection de P et D, on résout $f(x)=x-5$, qui équivaut à $-x^2+4x+5=x-5$, c'est-à-dire $-x^2+3x+10=0$.

Calculons le discriminant : $\Delta = 9-4\times(-1)\times10=49$.

Solutions

Comme $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{49}}{-2} = 5 \text{ et } x_2 = \frac{-3+\sqrt{49}}{-2} = -2$$

On a $f(x_1) = f(5) = 0$ et $f(x_2) = f(-2) = -7$.

Les deux courbes P et D se coupent donc en deux points de coordonnées $(5;0)$ et $(-2;-7)$.

EXERCICE 1.8 Le nombre d'objets x (avec $x \geq 0$) associés à un coût de fabrication de 3 700 € doit vérifier l'équation $0,5x^2 + 5x + 1048 = 3700$, ce qui équivaut à $0,5x^2 + 5x - 2652 = 0$.

Le discriminant de $0,5x^2 + 5x - 2652$ est : $\Delta = 25 - 4 \times (-2652) \times 0,5 = 5329$.

Comme $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-5+\sqrt{5329}}{2 \times 0,5} = 68 \text{ et } x_2 = \frac{-5-\sqrt{5329}}{2 \times 0,5} = -78$$

Comme $x \geq 0$, seule la solution $x_1 = 68$ convient. Il faut donc fabriquer 68 objets pour que les coûts de fabrication s'élèvent à 3700 €.

EXERCICE 1.9 $f(x) = x^2 + mx + m - 1$ n'admet qu'une seule racine réelle si, et seulement si, son discriminant est nul.

Or $\Delta = m^2 - 4 \times (m-1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$.

On a $\Delta = 0$ si, et seulement si, $(m-2)^2 = 0$, c'est-à-dire $m = 2$.

Donc $f(x)$ n'admet qu'une racine réelle lorsque $m = 2$. Cette racine est solution de l'équation $x^2 + 2x + 1 = 0$, c'est-à-dire solution de $(x+1)^2 = 0$. Cette racine est donc : $x_0 = -1$.

EXERCICE 1.10

1 $f(x) = (m-1)x^2 + 2mx + 1$ est un polynôme du second degré si le coefficient du terme de degré deux, $m-1$, est différent de 0, c'est-à-dire si $m \neq 1$.

2 Pour que $f(x) = 0$ admette une unique solution, il faut et il suffit que $\Delta = 0$, où Δ est le discriminant de $f(x)$.

Or $\Delta = 4m^2 - 4(m-1) = 4m^2 - 4m + 4$.

Résolvons alors $\Delta = 0$, c'est-à-dire $4m^2 - 4m + 4 = 0$.

Pour cela, calculons le discriminant Δ' de $4m^2 - 4m + 4$:

$\Delta' = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 4 = 16 - 64 = -48$