I – Cours, savoir-faire et méthodes

Avant de vous lancer dans la résolution des premières questions, il n'est pas inutile de consacrer du temps à réviser les connaissances élémentaires. Bien évidemment, nous ne pouvons dans cet ouvrage reprendre l'ensemble des notions. Pour un cours complet, nous vous renvoyons à l'ouvrage « *Tests de logique mathématique et calcul* » (3ème édition, même éditeur, même auteur).

I.1 – Reprenez les bases de l'arithmétique

1.a – Nombres, opérations basiques et divisibilité

Astuce : Il est important de différencier les **nombres** et les **chiffres**.
Les chiffres (nous utilisons les chiffres arabes) sont les symboles : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qui, combinés, forment des nombres.
Dans un nombre, le chiffre le plus à droite est appelé l'unité, le suivant vers la gauche la dizaine, le suivant la centaine, le millier,… Si le nombre possède des décimales, on trouve de gauche à droite après la virgule, les dixièmes, les centièmes, les millièmes, …

Priorités dans les calculs.

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

$$c \times (a + b) + d \times (a + b) = (a + b) \times (c + d)$$

Les tables de multiplication.
Je vous conseille vivement de **réapprendre (apprendre ?) vos tables de multiplication de 1 à 15**.

Recopiez-les, affichez-les, récitez-les… peu importe la méthode, sachez-les ! Comme il vous faut maîtriser l'alphabet avant d'écrire, les tables de multiplication sont la base de l'arithmétique.

×	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	6	8	10	12	14	16
3	3	6	9	12	15	18	21	24
4	4	8	12	16	20	24	28	32
5	5	10	15	20	25	30	35	40
6	6	12	18	24	30	36	42	48
7	7	14	21	28	35	42	49	56
8	8	16	24	32	40	48	56	64
9	9	18	27	36	45	54	63	72
10	10	20	30	40	50	60	70	80
11	11	22	33	44	55	66	77	88
12	12	24	36	48	60	72	84	96
13	13	26	39	52	65	78	91	104
14	14	28	42	56	70	84	98	112
15	15	30	45	60	75	90	105	120

×	9	10	11	12	13	14	15
1	9	10	11	12	13	14	15
2	18	20	22	24	26	28	30
3	27	30	33	36	39	42	45
4	36	40	44	48	52	56	60
5	45	50	55	60	65	70	75
6	54	60	66	72	78	84	90
7	63	70	77	84	91	98	105
8	72	80	88	96	104	112	120
9	81	90	99	108	117	126	135
10	90	100	110	120	130	140	150
11	99	110	121	132	143	154	165
12	108	120	132	144	156	168	180
13	117	130	143	156	169	182	195
14	126	140	154	168	182	196	210
15	135	150	165	180	195	210	225

<u>Divisibilité.</u> De nombreuses questions portent sur la divisibilité tant en calcul qu'en conditions minimales ou en logique, il faut donc parfaitement connaître les critères de divisibilité.

Méthode : critères de divisibilité

- **Critère de divisibilité par 2.**

Un nombre N est divisible par 2 si et seulement si N est pair, i.e. s'il se termine par 0, 2, 4, 6, 8.

- **Critère de divisibilité par 3.**

Un nombre N est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Ex. : 1 215 est divisible par 3 car $1 + 2 + 1 + 5 = 9$ et, 9 est divisible par 3.

- **Critère de divisibilité par 4.**

Un nombre N est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

Ex. : 123 212 216 est divisible par 4 car 16 est divisible par 4.

- **Critère de divisibilité par 5.**

Un nombre N est divisible par 5 si et seulement si N se termine par 0 ou 5.

- **Critère de divisibilité par 6.**

Un nombre N est divisible par 6 si et seulement si N est à la fois divisible par 2 **<u>et</u>** par 3. Un nombre N est donc divisible par 6 s'il est pair et si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Ex. : 1 716 est divisible par 6 car il est pair, et, $1 + 7 + 1 + 6 = 15$ et, 15 est divisible par 3.

- **Critère de divisibilité par 7.**

Un nombre N est divisible par 7 si et seulement si en calculant la somme de ses chiffres pris à partir de la droite multipliés respectivement par 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, … le résultat est un multiple de 7.

Ex. : 413 est divisible par 7 car $3\times1 + 1\times3 + 4\times2 = 14$
et, 14 est divisible par 7.

Autre méthode pour un nombre à 3 chiffres : un nombre à trois chiffres CDU est divisible par 7 si et seulement si CD – 2U est divisible par 7.

Ex. : 413 est divisible par 7 car $41 - 2\times3 = 35$ et, 35 est divisible par 7.

Inutile de vous faire remarquer que ces critères sont extrêmement compliqués à appliquer et que le meilleur moyen de savoir si un nombre est divisible par 7 est de connaître la table des 7 et de décomposer ce nombre en multiple(s) de sept.

Ex. : 413 peut se décomposer en multiples évidents de 7
$413 = 420 - 7$ Donc, $413 = 6\times7\times10 - 7 = 59\times7$!

- **Critère de divisibilité par 8.**

Un nombre N est divisible par 8 si et seulement si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.

Ex. : 123 212 216 est divisible par 8 car 216 est divisible par 8.

- **Critère de divisibilité par 9.**

Un nombre N est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Ex. : 7 218 est divisible par 9 car 7 + 2 + 1 + 8 = 18
et, 18 est divisible par 9.

- **Critère de divisibilité par 10.**

Un nombre N est divisible par 10 si et seulement si N se termine par 0.

- **Critère de divisibilité par 11.**

Un nombre N est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme de ses chiffres de rang impair et la somme de ses chiffres de rang pair est divisible par 11.
Pour un nombre à trois chiffres, la somme des unités et des centaines est égale au chiffre des dizaines (attention, c'est un critère de divisibilité et pas de non divisibilité).

Ex. : 495 est divisible par 11 car 4 + 5 = 9
8 690 est un multiple de 11 car (8 + 9) – (6 + 0) = 11

- **Critère de divisibilité par 13** (*pour un nombre à trois chiffres*)**.**

Un nombre à trois chiffres CDU est divisible par 13 si et seulement si CD + 4U est divisible par 13.

Ex. : 637 est divisible par 13 car $63 + 4 \times 7 = 91$ et 91 est divisible par 13.

- **Critère de divisibilité par 17** (*pour un nombre à trois chiffres)***.***

Un nombre à trois chiffres CDU est divisible par 17 si et seulement si CD - 5U est divisible par 17.

Ex. : 476 est divisible par 17 car $47 - 5 \times 6 = 17$ et 17 est divisible par 17.

Les nombres premiers. Un nombre premier n'est divisible que par 1 et par lui-même.
Vous le constaterez lors des concours, de nombreuses questions portent sur les nombres premiers et par essence, ils sont difficiles à repérer. C'est pourquoi il faut apprendre par cœur les plus usuels.

Les classiques : Apprenez-les.

2 ◆ 3 ◆ 5 ◆ 7 ◆ 11 ◆ 13 ◆ 17 ◆ 19 ◆ 23 ◆ 29 ◆ 31 ◆ 37 ◆ 41
43 ◆ 47 ◆ 53 ◆ 59 ◆ 61 ◆ 67 ◆ 71 ◆ 73 ◆ 79 ◆ 83 ◆ 89 ◆ 97

Remarquez que 2 est le seul nombre premier pair.

Astuce. Comment savoir si un nombre est premier ?
Pour reconnaître un nombre premier, il faut essayer de le diviser par un nombre premier. L'astuce consiste à trouver une approximation de la racine carrée (R) du nombre et de vérifier si les nombres premiers inférieurs à la valeur approchée (R) divisent le nombre étudié. Si aucun des nombres premiers inférieurs à (R) ne divise ce nombre, alors il est premier.

Décomposition en facteurs premiers. Tout entier naturel non nul peut être décomposé d'une manière unique (à l'ordre près) en un produit de nombres premiers.

Ex. : la décomposition de 495 donne $11 \times 3 \times 3 \times 5$

Astuce. La technique de décomposition de nombres est **LA** méthode-clé pour gagner en rapidité de calcul. Pour simplifier une fraction, calculez mentalement une division ou une multiplication : la décomposition vous permet de travailler avec des nombres simples. Devenue un réflexe, cette méthode vous fera gagner un temps précieux le jour du concours. Entraînez-vous !

Plus petit commun multiple (PPCM). C'est le plus petit entier positif qui est multiple de deux ou plusieurs entiers d'une série donnée.

Plus grand commun diviseur (PGCD). C'est le plus grand entier positif diviseur de deux ou plusieurs entiers sans reste. Le PGCD correspond au produit des facteurs qui sont communs dans les décompositions de tous les entiers de la série.

Principales opérations sur les nombres pairs et impairs.

+	Pair	Impair
Pair	Pair	Impair
Impair	Impair	Pair

×	Pair	Impair
Pair	Pair	Pair
Impair	Pair	Impair

Retenez que $\forall$ n entier pair ou impair : **n×Pair = Pair**
$(\text{Pair})^n$ = Pair
$(\text{Impair})^n$ = Impair

Astuce. En cas de doute… testez la parité avec les chiffres 1 et 2.

Ex. : $1 \times 2 = 2$ (pair) $1 \times 1 = 1$ (impair) …

1.b – Puissances et racines carrées

Puissance. Une puissance indique combien de fois un nombre apparaît comme facteur d'un produit.
Dans l'expression b^p, b est la **base** et p la **puissance**. On dit que b est élevée à la puissance p ou que b est factorisée p fois.

Ex. : $12^6 = 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12$ (12 est factorisé 6 fois)

Remarques importantes.
- La puissance 2 se dit « au carré » et la puissance 3 se dit « au cube ».
- Un carré est toujours positif !

- Un nombre, qu'il soit positif ou négatif, élevé à une puissance paire est toujours positif.
- Un nombre élevé à une puissance impaire est toujours du signe de sa base.
- S'il n'y a pas de parenthèses, vous appliquez la puissance uniquement au nombre et non à son signe : $-2^2 = -4 \neq (-2)^2 = 4$
- La puissance d'un nombre compris entre 0 et 1 est toujours inférieure à sa base : $0,9^2 = 0,81 < 0,9$

Les formules classiques : Apprenez-les.

$$\boxed{x^0 = 1}$$

$$\boxed{(x^a)^b = x^{a \times b}}$$

$$\boxed{x^1 = x}$$

$$\boxed{\frac{1}{x^a} = x^{-a}}$$

$$\boxed{x^a \times x^b = x^{a+b}}$$

$$\boxed{x^a \times y^a = (x \times y)^a}$$

$$\boxed{\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}}$$

Astuce. Calculer facilement le carré d'un nombre.

Lorsque l'on connaît le carré d'un nombre, il est très facile de calculer le carré du nombre suivant ou du nombre précédent en utilisant les identités remarquables.

Souvenez-vous : $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$, il suffit donc de rajouter $(2a + 1)$ au carré de l'entier a pour calculer le carré de l'entier suivant !

Ex. : si vous connaissez $35^2 = 1\,225$,
alors $36^2 = 35^2 + [2\times35 + 1] = 1\,225 + 71 = 1\,296$

De même, $(a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1$, il suffit donc de rajouter $(-2a + 1)$ au carré de l'entier a pour calculer le carré de l'entier précédent !

Ex. : si vous connaissez $35^2 = 1\,225$,
alors $34^2 = 35^2 + [-2\times35 + 1] = 1\,225 - 69 = 1\,156$

Astuce. Calculer le carré d'un nombre se terminant par 5.

Pour calculer le carré d'un nombre à deux chiffres se terminant par 5, il suffit de multiplier le chiffre des dizaines par son consécutif et de juxtaposer 25 au résultat obtenu.

Comprenez qu'un nombre à deux chiffres se terminant par 5 peut s'écrire de la forme *d5* (d matérialisant le chiffre des dizaines). Ce nombre peut se décomposer en $(10\times d + 5)$ et alors :

$(10\times d + 5)^2 = 100d^2 + 100d + 25 = 100\times d\times(d + 1) + 25$

Ex. : pour calculer le carré de 65, multiplions le chiffre des dizaines par son consécutif : $6\times7 = 42$, puis, juxtaposons 25 au résultat : 42//25
Alors, $65^2 = 4225$

En combinant ces deux astuces, vous pourrez calculer en quelques secondes le carré d'un nombre à deux chiffres quel qu'il soit !

Les carrés et les cubes parfaits. Apprenez-les !

Un carré parfait est un entier dont la racine carrée est un nombre entier.

Carrés	**Cubes**
$1^2 = 1$	$1^3 = 1$
$2^2 = 4$	$2^3 = 8$
$3^2 = 9$	$3^3 = 27$
$4^2 = 16$	$4^3 = 64$
$5^2 = 25$	$5^3 = 125$
$6^2 = 36$	$6^3 = 216$
$7^2 = 49$	$7^3 = 343$
$8^2 = 64$	$8^3 = 512$
$9^2 = 81$	$9^3 = 729$
$10^2 = 100$	$10^3 = 1\,000$
$11^2 = 121$	$11^3 = 1\,331$
$12^2 = 144$	$12^3 = 1\,728$
$13^2 = 169$	
$14^2 = 196$	
$15^2 = 225$	
$16^2 = 256$	
$17^2 = 289$	
$18^2 = 324$	
$19^2 = 361$	
$20^2 = 400$	
$25^2 = 625$	
$30^2 = 900$	
$35^2 = 1\,225$	

Identités remarquables

$$a^2 - b^2 = (a + b)\times(a - b)$$
$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\times a\times b$$
$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2\times a\times b$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)\times(a^2 + a\times b + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)\times(a^2 - a\times b + b^2)$$

<u>Racine carrée.</u> Un nombre réel positif **x** est appelé « racine carrée » d'un nombre réel positif ***y*** si **x** élevé au carré vaut ***y***. On utilise le symbole $\sqrt{\ }$ pour indiquer la racine carrée d'un nombre.

Attention, une racine carrée est toujours positive !

Ex. : 4 et -4 élevés au carré donnent tous deux 16, mais la racine carrée de 16 est 4.

Les formules classiques. Apprenez-les !

$$\boxed{x = \sqrt{x^2}}$$

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)^a = \sqrt{x^a}}$$

$$\boxed{\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}}$$

$$\boxed{\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{x \times y}}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}}$$

Les racines carrées les plus fréquentes aux concours. Apprenez-les.

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41 \qquad \sqrt{3} \approx 1{,}73 \qquad \sqrt{5} \approx 2{,}24$$

Remarques

- Il est impossible de simplifier une somme de racines carrées.
- Pour simplifier une racine carrée il faut factoriser les carrés parfaits et les sortir de leurs racines.

Ex. : $\sqrt{10\,800} = \sqrt{100 \times 36 \times 3} = \sqrt{100} \times \sqrt{36} \times \sqrt{3} = 10 \times 6 \times \sqrt{3} = 60\sqrt{3}$