CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS

1.1 Définitions

Un *graphe* G est un couple

$$G = \Big(V(G), E(G)\Big)$$

ou, plus simplement

$$G = (V, E),$$

où V est un ensemble fini non vide et où E est un ensemble fini, éventuellement vide, muni d'une application :

$$\varphi : E \longrightarrow \mathcal{P}_2(V) \bigcup \mathcal{P}_1(V),$$

avec $\mathcal{P}_2(V)$ ensemble des parties à deux éléments de V, appelées aussi paires d'éléments de V et $\mathcal{P}_1(V)$ ensemble des parties à un élément de V, appelées aussi singletons de V.
Les éléments de V sont appelés *sommets*, les éléments de E sont appelés *arêtes.*
Le cardinal de V est appelé *ordre* G.
Pour $\varphi(e) = \{u, v\}$, élément de $\mathcal{P}_2(V)$, on dit que u et v sont les *extrémités* de l'arête e, que les sommets u et v sont *adjacents* ou *voisins* et que l'arête e est *incidente* aux sommets u et v.
Une *boucle* est une arête e, telle que $\varphi(e)$ appartienne à $\mathcal{P}_1(V)$.
Si $\varphi^{-1}(\{u, v\})$ est de cardinal 1, on dit que $\varphi^{-1}(\{u, v\})$ est une *arête simple,* si $\varphi^{-1}(\{u, v\})$ est de cardinal supérieur ou égal à 2, on dit que $\varphi^{-1}(\{u, v\})$ est une *arête multiple.*
Un sommet qui n'admet aucune arête incidente est dit *isolé.*

Exemple 1.1.1 *On peut représenter un graphe, comme dans l'exemple suivant :*

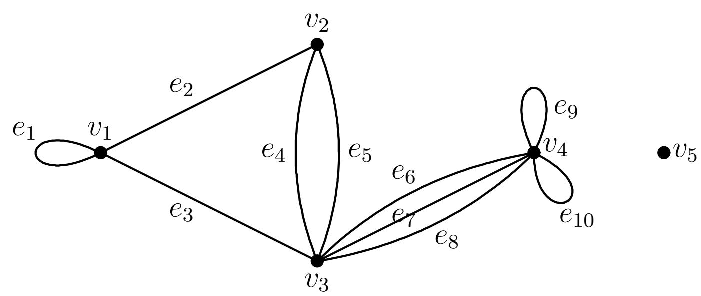


FIG. 1.1: Exemple de représentation d'un graphe

Dans cet exemple :

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$,
$\varphi(e_1) = \{v_1\}$, $\varphi(e_2) = \{v_1, v_2\}$, $\varphi(e_3) = \{v_1, v_3\}$,
$\varphi(e_4) = \varphi(e_5) = \{v_2, v_3\}$,
$\varphi(e_6) = \varphi(e_7) = \varphi(e_8) = \{v_3, v_4\}$,
$\varphi(e_9) = \varphi(e_{10}) = \{v_4\}$,
e_2 *et* e_3 *sont des arêtes simples,*
$\{e_4, e_5\}$ *et* $\{e_6, e_7, e_8\}$ *sont des arêtes multiples,*
e_1 *est une boucle simple,*
$\{e_9, e_{10}\}$ *est une boucle multiple,*
le sommet v_5 *est isolé.*

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *simple* s'il n'admet ni boucle, ni arête multiple. Dans ce cas, si E est non vide, l'application φ est injective, d'image incluse dans $\mathcal{P}_2(V)$ et, on identifie e, élément de E, et $\varphi(e)$, élément de $\mathcal{P}_2(V)$. Les arêtes de G sont alors des parties à deux éléments de V.
Remarquons que, si G est un graphe simple, admettant n sommets et m arêtes, on a :

$$m \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Le *degré* d'un sommet v, noté $d(v)$, est le nombre d'arêtes incidentes à v, en comptant deux fois chaque boucle.
Le *degré minimum* de G est :

$$\delta(G) = \min \{d(v) \mid v \in V\}.$$

Le *degré maximum* de G est :

$$\Delta(G) = \max \{d(v) \mid v \in V\}.$$

Un *sous–graphe* d'un graphe G est un graphe H, tel que $V(H)$ soit inclus dans $V(G)$, $E(H)$ soit inclus dans $E(G)$ et tout élément de $E(H)$ ait ses extrémités dans $V(H)$.

On appelle *décomposition* d'un graphe G, une famille $(G_i)_{i\in I}$ de sous–graphes de G, tels que :

$$\Big(E(G_i)\Big)_{i\in I} \text{ soit une partition de } E(G)$$

et

$$\bigcup_{i\in I} V(G_i) = V(G).$$

Un *sous–graphe couvrant* de G est un sous–graphe H de G, tel que $V(H)$ soit égal à $V(G)$.

Soit E' un sous–ensemble de E, on note $G \setminus E'$ le graphe $\{V, E \setminus E'\}$.

Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit W un sous–ensemble de V.

Le *sous–graphe engendré par* W est le graphe $G_W = (W, F)$, où F est l'ensemble obtenu à partir de E, en supprimant toutes les arêtes incidentes aux sommets de $V \setminus W$.

Soit V' un sous–ensemble de V, distinct de V, on note $G \setminus V'$ le sous–graphe engendré par $V \setminus V'$.

Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit F un sous–ensemble de E.

Le *sous–graphe induit* par F est le graphe $G_F = (W, F)$, où W est l'ensemble des sommets de G, extrémités des arêtes de F.

Exemple 1.1.2 *Dans la figure 1.2, les graphes H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 et H_6 sont des sous–graphes du graphe G.*

Les graphes H_3 et H_4 sont des sous–graphes couvrants de G.

Les graphes H_5 et H_6 sont les sous–graphes de G engendrés respectivement par $\{v_2, v_3, v_4\}$ et $\{v_1, v_4\}$.

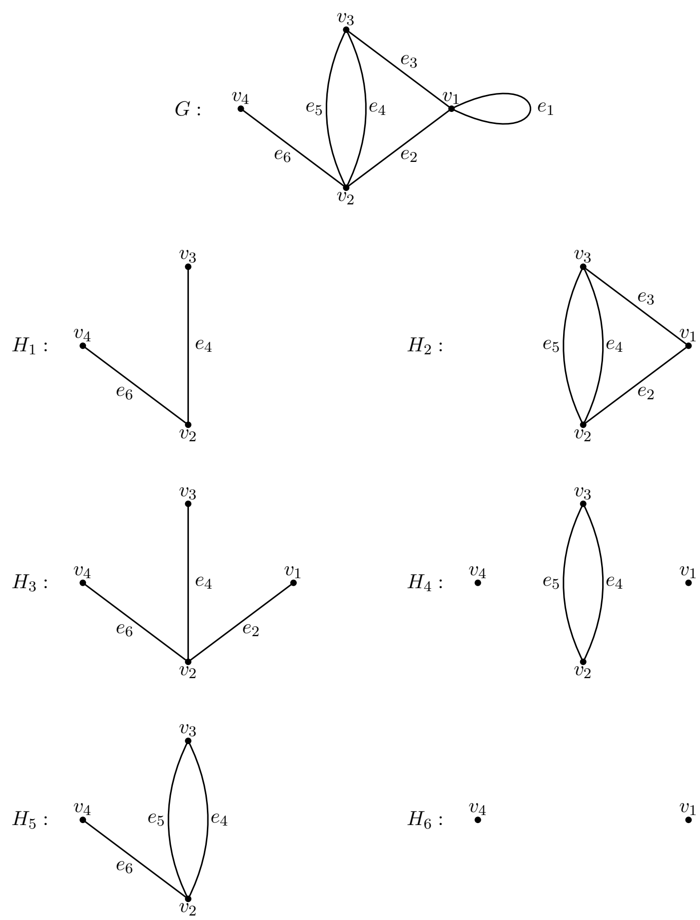


FIG. 1.2: Exemples de sous–graphes

Nous allons maintenant donner quelques exemples classiques de graphes.

• Le *graphe complet d'ordre* n ou n*–clique*, noté K_n, est le graphe simple d'ordre n, admettant $\binom{n}{2}$ arêtes, c'est–à–dire que toute paire de sommets de K_n est reliée par une arête.

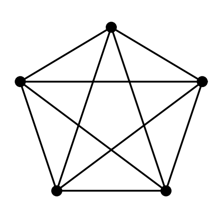


FIG. 1.3: 5-clique

• Le *n-stable* est le graphe d'ordre n, dont l'ensemble des arêtes est vide.

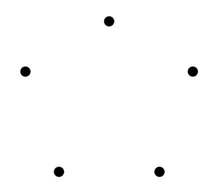


FIG. 1.4: 5-stable

• Pour n supérieur ou égal à 1, la *n–chaîne*, notée P_n, est le graphe simple d'ordre $n+1$, tel que

$$V(P_n) = \{v_0, \ldots, v_n\}$$

et

$$E(P_n) = \Big\{ \{v_i, v_{i+1}\} \mid i = 0, \ldots, n-1 \Big\}.$$

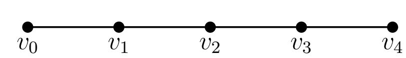


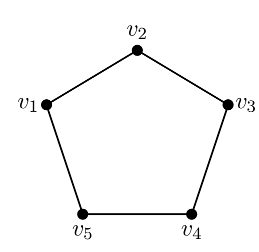
FIG. 1.5: 4–chaîne

• Pour n supérieur ou égal à 3, le *n–cycle*, noté C_n, est le graphe simple d'ordre n, tel que

$$V(C_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

et

$$E(C_n) = \Big\{ \{v_i, v_{i+1}\} \mid i = 1, \ldots, n-1 \Big\} \cup \{v_n, v_1\}.$$



ou

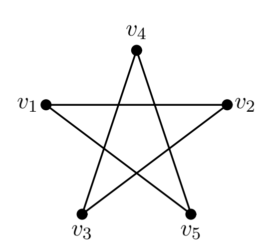


FIG. 1.6: 5–cycle

• Soit k un entier inférieur ou égal à n. Un graphe $G = (V, E)$, d'ordre n, est dit *k–parti* (ou *multiparti*), s'il existe une partition de V en $V_1 \cup \cdots \cup V_k$, telle que, pour tout i de $1, \ldots, k$, le sous–graphe engendré par V_i soit un stable. Un tel graphe est noté $G = (V_1, \ldots, V_k; E)$.
Un graphe 2–parti est dit *biparti*.

Remarquons que, si G est un graphe k–parti d'ordre n, k est inférieur ou égal à n et, pour tout h compris entre k et n, G est h–parti.

FIG. 1.7: Le graphe G est biparti, le graphe H est 3–parti

Remarquons que tout cycle d'ordre pair est biparti, que tout cycle d'ordre impair est 3–parti et que les graphes 1–partis sont les stables.

• Un graphe k–parti $G = (V_1, \ldots, V_k; E)$ est dit *k–parti complet*, si toute paire de sommets n'appartenant pas à un même ensemble V_i est relié par une arête. De plus, si, pour tout i compris entte 1 et k, on note $|V_i| = n_i$, un tel graphe est noté $K_{n_1,\ldots,n_k}$.

FIG. 1.8: $K_{2,3}$ et $K_{2,2,4}$

La *matrice d'adjacence* d'un graphe G, associée à une numérotation de $V(G)$: $\{v_1, \ldots, v_n\}$, est la matrice carrée $M_G = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, où

pour i distinct de j, m_{ij} est le nombre d'arêtes incidentes à la fois à v_i et à v_j,

pour tout i, m_{ii} est le nombre de boucles incidentes à v_i.

Dans l'exemple de la figure 1.1, la matrice d'adjacence est :

$$M_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Certaines propriétés des graphes trouvent assez naturellement une traduction en termes de propriétés de matrices, voir le théorème 2.1.10.

Un des résultats fondamentaux de la théorie des graphes est le théorème de Turán, qui date de 1941 et qui est à l'origine de la théorie des graphes extrémaux.

Une *p–clique* d'un graphe G est un sous–graphe de G, complet, d'ordre p. En particulier, un *triangle* de G est un sous–graphe de G, complet, d'ordre 3.

Théorème 1.1.3 (Théorème de Turán) *Soit p un entier supérieur ou égal à 2 et soit G un graphe simple, d'ordre n, ne contenant pas de p–clique. Alors, en notant m le nombre d'arêtes de G, on a :*

$$m \le \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}.$$

Démonstration. Soit p un entier supérieur ou égal à 2, fixé. Montrons par récurrence, que, tout graphe simple, d'ordre n, ne contenant pas de p–clique, a un nombre d'arêtes inférieur ou égal à $\left(1 - \frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}$. Pour n égal à 1, le résultat est trivial. Supposons donc que n soit supérieur ou égal à 2 et que tout graphe d'ordre n' strictement inférieur à n, sans p–clique, ait un nombre d'arêtes m' inférieur ou égal à $\left(1 - \frac{1}{p-1}\right)\frac{n'^2}{2}$.

Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n, ne contenant pas de p–clique.

1^{er} *cas : $n < p$*. On a alors : $p \ge n+1$, $\quad \frac{1}{p-1} \le \frac{1}{n}$, $\quad 1 - \frac{1}{p-1} \ge \frac{n-1}{n}$ $\quad$ et

$$\left(1 - \frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2} \ge \frac{n(n-1)}{2} \ge m.$$

2^e *cas :* $n \geq p$. Le graphe G est distinct de la n–clique, donc E est distinct de $\mathcal{P}_2(V)$. Notons alors :

$$\mathcal{P}_2(V) \setminus E = \{e_1, \ldots, e_k\}$$

et posons :

$$G_0 = G, \text{ et } \forall j \in \{1, \ldots, k\},\ G_j = \Big(V, E \bigcup \{e_1, \ldots, e_j\}\Big).$$

Le graphe G_0 ne contient pas de p–clique, le graphe G_k est la n–clique, donc contient une p–clique.
On en déduit que l'ensemble :

$$\Big\{ j \in \{0, \ldots, k-1\} \mid G_j \text{ ne contient pas de } p\text{–clique} \Big\}$$

est un ensemble d'entiers, non vide, majoré, donc admet un plus grand élément que nous noterons q. Le graphe G_{q+1} contient donc une p–clique. Le graphe G_q ne contient pas de p–clique et est obtenu, à partir de G_{q+1}, par suppression d'une arête. Cette arête appartient donc à la p–clique de G_{q+1}, donc G_q contient une $(p-1)$–clique, que nous noterons H. Soit H' le sous–graphe de G_q engendré par l'ensemble $V(G_q) \setminus V(H)$ et soit $E(H, H')$ l'ensemble des arêtes de G_q ayant une extrémité dans H et l'autre extrémité dans H'. On a :

$$m = |E(G)| \leq |E(G_q)| = |E(H)| + |E(H')| + |E(H, H')|.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$|E(H')| \leq \Big(1 - \frac{1}{p-1}\Big) \frac{(n-p+1)^2}{2}.$$

D'autre part, on a :

$$|E(H)| = \frac{(p-1)(p-2)}{2}.$$

Enfin, G_q ne contenant pas de p–clique, tout sommet de H' est adjacent à, au plus, $p-2$ sommets de H. On en déduit :

$$|E(H, H')| \leq (p-2)(n-p+1).$$

On obtient :

$$m \leq \frac{(p-1)(p-2)}{2} + \Big(1 - \frac{1}{p-1}\Big) \frac{(n-p+1)^2}{2} + (p-2)(n-p+1),$$