Chapitre 1

Introduction, vocabulaire de base

Ce qui limite le vrai, ce n'est pas le faux,
mais l'insignifiant.[1]
René Thom

1.1 Un peu d'histoire (avant 1900)

Selon G. Wanner[2], la première apparition des équations différentielles remonte à l'année 1638 quand Florimond Debeaune (1601-1652) propose deux problèmes géométriques sur la construction des courbes à partir des propriétés de la tangente.

Premier problème de Debeaune

> *« Trouver une courbe $y(x)$ pour laquelle en chaque point P, le segment délimité par les points de concours avec l'axe des x de la tangente PT et de la perpendiculaire PN à ce même axe soit constant ».*

---

[1] *Prédire n'est pas expliquer*, Flammarion, collection Champs, n° 288, p. 132.

[2] Les équations différentielles ont 350 ans, *L'enseignement mathématique*, T. 34, Fasc. 3-4, 1988.

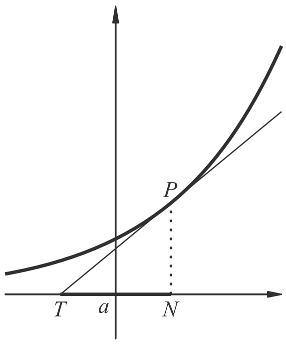

FIG. 1.1: Premier problème

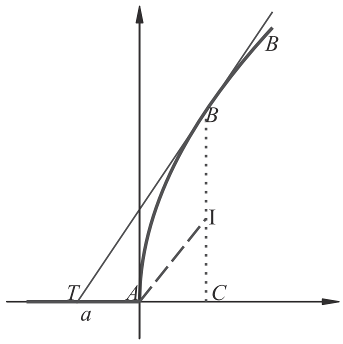

FIG. 1.2: Deuxième problème

Deuxième problème de Debeaune

> « *Deux lignes infinies AC, AI sont données en sorte que l'angle CAI soit de 45 degrés, on demande de décrire la courbe ABB qui soit de telle nature que, si l'on mène d'un de ses points quelconques B l'ordonnée BC & la touchante BT, la raison de BC à CT soit toujours la même que celle de a à BI* ».

À l'époque, ni Fermat (1601-1665), ni Roberval (1602-1675), ni Debeaune lui-même ne réussissent à les résoudre. C'est René Descartes (1596-1650) qui, grâce à une méthode graphique, apporte une réponse au deuxième problème.

Edward L. Ince[3], quant à lui, situe la naissance des équations différentielles au 11 novembre 1675, lorsque Leibniz (1646-1716) introduit la notation

$$\int y dy = \frac{1}{2}y^2.$$

La terminologie *œquatio differentialis* ou équations différentielles a été utilisée en 1676 par ce même Leibniz pour désigner une relation entre les différentielles dx et dy de deux quantités variables x et y.

À leur début, les équations différentielles sont étroitement associées à la résolution de problèmes géométriques, à la physique newtonienne (dynamique du point, mouvements des planètes) et à la formalisation du calcul différentiel et intégral. Elles deviennent rapidement un instrument efficace d'analyse des phénomènes de la nature et une source de questionnements

[3] *Ordinary differential equations*, Courier Dover Publications, 1956, pp. 558.

au sujet des concepts mathématiques comme celui de fonction. À la suite de Newton (1642-1727) et de Leibnitz, les mathématiciens C. Huyguens (1629-1695), les frères Bernoulli, Jacob (1657-1705) et Johan (1667-1748) et Guillaume de l'Hospital (1661-1704) résolvent plusieurs problèmes « modèles » comme celui de l'oscillation d'un pendule, du brachistrome... et diffusent les premiers éléments du calcul différentiel et intégral tout en élaborant les premières méthodes d'intégration à l'aide des séries, de la « séparation des variables », ou encore, sur le plan graphique, de la « ligne polygonale » introduite par Descartes.

Au XVIII^e siècle, un nom émerge de l'ensemble de tous les mathématiciens : Leonhard Euler (1707-1783). Par sa production importante et la diversité des thèmes qu'il a embrassés, il devient la cheville ouvrière de nombreuses innovations. Le domaine des équations différentielles n'y fait pas exception. Non seulement il synthétise les travaux antérieurs, mais il approfondit diverses questions théoriques comme la superposition des solutions des équations différentielles linéaires. C'est lui qui, en 1743, introduit l'équation caractéristique[4] pour intégrer les équations linéaires à coefficients constants. Il a fondé aussi une méthode graphique et numérique de résolution, méthode qui porte son nom et qui est encore enseignée aujourd'hui.

Dans le siècle d'Euler, d'autres mathématiciens étudient et diffusent le calcul infinitésimal : D. Bernoulli (1700-1782), A. C. Clairaut (1713-1765), J. F. Riccati (1676-1754) et son fils Vincenzo (1700-1782), J. L. R. D'Alembert (1717-1783) et J. L. Lagrange (1736-1813). La plupart s'intéressent à la résolution des équations différentielles particulières de premier ordre, souvent issues de la classification des courbes, de problèmes de physique ou simplement, de cas d'espèce.

Vers la fin du XVIII^e siècle, Gauss (1777-1855) introduit la variable complexe dans les équations différentielles et quelques années plus tard, Cauchy (1789-1857), puis Fourier (1768-1830), Liouville (1809-882), Bessel (1784-1846) et bien d'autres étendent son utilisation à d'autres questions d'analyse.

Les nouveaux procédés de classification et de réduction apparus dans la première moitié du XIX^e siècle, sont basés sur des changements de va-

[4] J. Dieudonné, *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900, tome 1*, Éditions Hermann, 1978, pp. 1-395.

riables ou de fonctions dépendant de ces variables. Elles vont toutes dans le sens de la simplification des équations données et de l'adaptation à chaque classe, de méthodes spécifiques d'intégration. Les concepts de solution et de résolution… que certains apparentent aux équations algébriques, s'affinent. Ainsi, pour Joseph Liouville, la question de « résolution » n'a de sens que si l'on précise la classe de fonctions dans laquelle on cherche les solutions. Si l'on imaginait, par exemple, que l'on ne connaît que les fonctions polynomiales ou rationnelles, l'équation différentielle $y'(x) = y(x)$, qui est toute simple, n'admettrait pas de « solutions ». Pour la résoudre, il faut élargir la classe des fonctions cherchées aux exponentielles.

Dans sa démarche novatrice, Joseph Liouville a commencé par dégager une première « bibliothèque » de fonctions qu'il qualifie d'élémentaires :

1. des fonctions rationnelles (de la forme $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des fonctions polynomiales) ;
2. des fonctions algébriques, solutions d'équations algébriques telles que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, solution de l'équation $y(x)^2 - x = 0$;
3. des fonctions logarithmiques, solutions de l'équation
$$y'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$
où f est une fraction rationnelle en x ;
4. des fonctions exponentielles, solutions de l'équation
$$y'(x) = f'(x)y(x)$$
où f est une fraction rationnelle en x.

Un exemple de fonction non élémentaire pourrait être la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$t \mapsto \int_0^t e^{-s^2} ds.$$

Intégrer (ou résoudre) une équation différentielle par *quadratures* signifie exprimer ses solutions à l'aide des fonctions élémentaires.

Se pose aussitôt la question : cette première « bibliothèque » de fonctions élémentaires suffit-elle à résoudre toutes les équations différentielles ? La réponse est non, et le premier contre-exemple est proposé par Liouville lui-même :
$$x'(t) = x(t)^2 + t^2.$$

Ainsi, pour intégrer les équations différentielles, il est nécessaire d'élargir le corps des fonctions élémentaires à de nouvelles fonctions, souvent solutions d'équations différentielles particulières comme celles de Bessel, d'Airy, les équations hypergéométriques, etc.

L'étude de ces processus d'extension des corps de fonctions trouve sa consécration dans la théorie de Galois différentielle. Petite sœur de la théorie de Galois algébrique et initiée par M. E. Vessiot (1865-1952) et C. E. Picard (1856-1941), elle apporte un formalisme moderne qui permet de mieux comprendre et évaluer les solutions des équations et systèmes différentiels linéaires comme les « fonctions spéciales », bien appréciées des physiciens. Hélas, la mise en œuvre des calculs induits par cette théorie devenant extrêmement complexe et décourageante[5], il faut attendre l'avènement et le développement d'outils informatiques et algorithmiques (années 1980) pour qu'elle retrouve l'intérêt qui lui est porté à la fin du XIX^e et au début du XX^e siècle.

L'autre théorie qui connaît pratiquement les mêmes périodes de silence et d'éclat est celle des symétries de Lie. Fondée par S. Lie (1842-1899) dans le sillage de la théorie des groupes (en l'occurrence, continus), elle se fixe comme objectif de traduire les propriétés d'intégrabilité d'une équation différentielle en termes de symétries, c'est-à-dire, de transformations de la variable indépendante ou de la fonction inconnue dépendant de la variable sus-citée et qui conserve la forme de l'équation initiale. Ce procédé sert à unifier les méthodes d'intégration qui « *étaient spéciales à chaque type d'équations et n'avaient aucun lien commun* »[6].

Le développement récent des logiciels de calcul formel a permis aux méthodes des symétries de Lie de retrouver une place significative dans la résolution des équations différentielles.

Nous avons déjà évoqué les questions théoriques qui commencent à poindre au début du XIX^e siècle. L'existence et l'unicité des solutions qui étaient jusque là subordonnées aux procédures de calcul (changement de variables, réduction, utilisation des séries entières...) en sont parmi les plus

[5]Pour Painlevé, *« la vague s'arrêta quand tout ce qui était intégrable, dans les problèmes naturels, fut intégré »* et il situa cette vague à Euler (rapporté par D. Tournès dans « Le problème moderne de l'intégration des équations différentielles », *Bulletin des sciences mathématiques*, T28, 1904, p. 193-20).

[6]F. Marotte, Les équations différentielles linéaires et la théorie des groupes, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1ère série, T. 12, n^o 4 (1898), p. H1-H92.

importantes. Le premier à les avoir dégagées des modes de résolution est Cauchy qui, en 1820, formule ce que nous appelons aujourd'hui, le problème de Cauchy. Désormais, à côté des questionnements déjà éprouvés sur nombre de modalités d'explicitation des solutions, d'autres, essentiellement théoriques, commencent à apparaître. Ainsi, en ne tenant compte que de la continuité ou de la différentiabilité du second membre, des conditions suffisantes (peu restrictives) d'existence et d'unicité des solutions des systèmes différentiels normalisés sont établies dans des versions différentes par Cauchy, bien sûr, Peano, Picard, Lipschitz, etc. Pour les équations linéaires non normalisées, L. Fuchs (1833-1902) montre, pour chaque type de singularité (régulière ou irrégulière), l'existence de solutions développables en séries de Laurent (tronquées ou non à gauche selon la régularité de la singularité), multipliées par des puissances (en général complexes) de la variable complexe ou de son logarithme.

L'histoire des équations différentielles des années antérieures à 1900 ne se résume pas seulement à des méthodes d'intégration sous différentes expressions, aussi fécondes soient-elles. Face aux questions posées par les sciences expérimentales et aux besoins croissants des ingénieurs, leurs investigations ont très vite incorporé des techniques de résolution graphique et des algorithmes de calcul approché. D. Tournès a consacré aux méthodes d'intégration polygonale (méthode d'Euler), directionnelle (Jean Bernoulli) et autres, un travail[7] instructif et didactique, riche en correspondances et en références bibliographiques. Nous y apprenons en particulier le grand intérêt qu'ont porté les fondateurs du calcul infinitésimal et leurs continuateurs immédiats aux démarches constructives. Ainsi, dans le livre publié par V. Riccati, l'auteur décrit la construction d'instruments tractionnels qui servent à tracer des courbes intégrales d'une équation différentielle, appelées dans la foulée, des tractrices. Après une longue période de stagnation, à la fin du XIX^e siècle, les procédures numérico-graphiques ont repris de la vigueur. Entre 1894 et 1901, une nouvelle méthode est élaborée, la méthode de Runge-Kutta des noms des ingénieurs K. D. Runge (1856-1927) et M. W. Kutta (1867-1944), en perfectionnement continu jusqu'à nos jours.

En 1879, survient un événement majeur, car fondateur d'une théorie nouvelle, la publication de la thèse de doctorat[8] d'Henri Poincaré. Dans l'introduction, l'auteur présente la nouvelle approche comme suit :

[7]L'intégration graphique des équations différentielles ordinaires, *Historia Mathematica*, 30 (2003), 457-493.

[8]Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3ème série, tome 7 (1881), pp. 375-422.

> *Malheureusement, il est évident que dans la grande généralité des cas qui se présentent on ne peut intégrer ces équations à l'aide des fonctions déjà connues, par exemple à l'aide des fonctions définies par les quadratures. (...) Il est donc nécessaire d'étudier les fonctions définies par des équations différentielles en elles-mêmes et sans chercher à les ramener à des fonctions plus simples...*

Ainsi est née la *théorie qualitative des équations différentielles.* En quoi consiste-t-elle ? Essentiellement à décrire le comportement qualitatif, local ou global, des courbes définies par les solutions d'un système différentiel donné, sans connaître les expressions analytiques de ces dernières.

Sur le plan épistémologique, cet événement s'explique par au moins trois faits : l'essoufflement des méthodes quantitatives (intégration, réduction) qui sont empreintes parfois d'un caractère aléatoire, le constat d'existence de larges classes d'équations différentielles impossibles à ramener à celles déjà connues et enfin, le développement de la géométrie et son enrichissement d'outils nouveaux d'algèbre et de topologie. Pour expliquer l'importance de cette démarche qualitative, H. Poincaré[9], toujours lui, compare les équations différentielles aux équations algébriques dont on connaît mieux la problématique :

> *Le nombre d'équations intégrables par quadratures est extrêmement restreint, et tant qu'on ne s'est pas décidé à étudier les propriétés des intégrales en elles-mêmes, tout ce domaine analytique n'a été qu'une* TERRA INCOGNITA *qui semblait à jamais interdite au géomètre.*
> *Longtemps, s'est maintenu l'espoir de résoudre les équations algébriques par radicaux. On y a renoncé, et aujourd'hui les fonctions algébriques nous sont aussi bien connues que les radicaux auxquels on voulait les ramener.*
> *De même, les intégrales des équations algébriques que l'on a cherché longtemps à ramener aux fonctions logarithmiques et trigonométriques, s'expriment à l'aide de trancendantes nouvelles. Il devait en être à peu près de même des équations intégrales.*

La théorie qualitative est le premier jalon d'un long et riche processus qui a débordé le premier champ de compréhension des équations différentielles pour fonder la théorie des systèmes dynamiques. Adoptant une

[9] H. Poincaré, *Œuvres*, tome 1, première partie, Équations différentielles, Gauthier-Villars, 1951, p. III.

démarche parfois exclusivement topologique, ses promoteurs (Birkhoff, Nemitskii, Stepanov, Sibirskii, etc.) ont réussi à en faire une discipline qui étudie des objets aussi bien déterministes que stochastiques (théorie des jeux, inclusions différentielles...), continus (systèmes différentiels, groupes continus, équations d'évolution...) ou discrets (itérations d'applications, théorie des automates, équations aux différences...). Les champs d'application en sont nombreux et variés.

En guise de conclusion à ce bref historique des équations différentielles et de leur métamorphose en systèmes dynamiques, retenons l'observation de *Youri Ilyashenko* [10] qui le subdivise en trois périodes bien distinctes :

1. La période Newton : on vous donne une équation différentielle, *résolvez-la.*
2. La période Poincaré : on vous donne une équation différentielle, *sans la résoudre, étudiez le comportement qualitatif de ses solutions.*
3. La période Andronov : on ne vous donne pas d'équation différentielle, *étudiez le comportement qualitatif des solutions.*

Il est clair que le mot « période » ne doit pas être pris dans le sens restrictif de division de temps puisque les trois continuent à se développer avec vigueur, à s'entrelacer et à s'enrichir mutuellement.

Dans le chapitre consacré aux systèmes dynamiques, nous prolongerons cet historique au-delà des années 1900, années d'épanouissement des méthodes de Poincaré et d'émergence de celles d'Andronov.

1.2 Les systèmes différentiels : vocabulaire de base

1.2.1 Premières définitions et exemples

Définition 1.2.1 *On appelle système d'équations différentielles (ordinaires) la donnée de* n *relations*

$$F^i(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(m_1)}, \dots, x_n, x_n', \dots, x_n^{(m_n)}) = 0, \; (i = 1, \dots, n), \qquad (1.1)$$

[10] École d'été « Mathématiques modernes », Dubna, juillet 2005, (Ed. MSNM0, Moscou, 2007).