CHAPITRE 1

LES SUITES

1.1 Généralités sur les suites

Définition 1.1.1

Une suite (u_n) est une fonction définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note (u_n) : $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto u_n \end{array} \right.$

!

- u_n est appelé le terme général de la suite (u_n).
- Attention donc à bien faire la différence entre (u_n) (la suite) et u_n (un seul terme).
- On pourra noter indifféremment (u_n) ou tout simplement u.

Variations, monotonie d'une suite

Définition 1.1.2

Soit (u_n) une suite. On dit que :

a) *la suite (u_n) est* ***croissante*** *si pour tout $n \in \mathbb{N}\ :\ u_n \leqslant u_{n+1}$;*

b) *la suite (u_n) est* ***décroissante*** *si pour tout $n \in \mathbb{N}\ :\ u_n \geqslant u_{n+1}$;*

c) *la suite (u_n) est* ***monotone*** *si elle est croissante ou décroissante ;*

d) *la suite (u_n) est* ***constante*** *si pour tout $n \in \mathbb{N}\ :\ u_{n+1} = u_n$.*

!

- Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes : $u_n = (-1)^n$.
- Les premiers termes de la suite n'entrent pas forcément en compte dans la variation d'une suite. Ils peuvent cependant donner une indication sur la monotonie de la suite.

◆ Méthodes de détermination du sens de variation d'une suite

MÉTHODE 1. – SENS DE VARIATION D'UNE SUITE

Pour déterminer le sens de variation d'une suite (u_n), on peut utiliser l'une des règles suivantes :

a) On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

- Si $u_{n+1} - u_n$ est positive, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $u_{n+1} - u_n$ est négative, alors la suite (u_n) est décroissante.

b) Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, alors il suffit de comparer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

c) Si la suite (u_n) est définie explicitement : $u_n = f(n)$, alors il suffit d'étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$. La suite (u_n) et la fonction f ont le même sens de variation.

d) On utilise un raisonnement par récurrence (voir **section 2**).

! Il est bien évident que chacune de ces méthodes est adaptée au type de suite à laquelle nous serons confrontés.

Exemple

Déterminer le sens de variation des suites suivantes en utilisant la règle la mieux adaptée.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - n$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.

c) Pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$.

---

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n) = 2n \geqslant 0.$$

Par conséquent, la suite (u_n) est croissante.

b) Ici on étudie le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Pour tout $n \geqslant 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1} = \frac{n+n}{n+1} \geqslant 1.$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

c) On a $u_n = f(n)$ où $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$. La fonction f est dérivable sur $\left[0;+\infty\right[$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\left[0;+\infty\right[$. On déduit que la suite (u_n) est aussi strictement croissante.

Suite arithmétique

Définition 1.1.3

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe un réel r indépendant de n tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

Le nombre r est appelé la raison de la suite (u_n).

Exemple 1

La suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3$ $(n \in \mathbb{N})$ est arithmétique. Ici la raison est $r = 3$.

MÉTHODE 2. – DÉMONTRER QU'UNE SUITE EST ARITHMÉTIQUE

Une suite (u_n) est arithmétique si la différence entre deux termes consécutifs est constante. Cette constante est alors la raison de la suite.
Ainsi, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$, alors la suite (u_n) est arithmétique de raison r.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = 4n - 1$. Montrer que (u_n) est arithmétique.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 4(n+1) - 1 - 4n + 1 = 4.$$

Par conséquent, la suite (u_n) est bien arithmétique de raison $r = 4$.

Propriété 1.1.4

A) ***Expression du terme général en fonction de*** n *:*

- *si le premier terme est u_0, alors :* $\boxed{u_n = u_0 + nr}$ *;*
- *si le premier terme est u_p $(p < n)$, alors :* $\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$.

B) ***Somme des premiers termes*** *: si S désigne la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors :*

$$\boxed{S = (\text{Nombre de termes}) \times \frac{1^{er}\ \text{terme} + \text{dernier terme}}{2}}$$

Suite géométrique

Définition 1.1.5
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe un réel q indépendant de n tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_{n+1} = q.u_n}$$

Exemple 2

a) La suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ici la raison est $q = 3$.

b) La suite (v_n) définie par : $v_0 = -3$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La suite (v_n) est-elle géométrique ?

Méthode 3. – Démontrer qu'une suite est géométrique

Pour justifier qu'une suite (u_n) est géométrique, il suffit d'utiliser la définition suivante.
Une suite (u_n) est géométrique si l'on peut écrire u_{n+1} sous la forme : $u_{n+1} = qu_n$. Le nombre réel q est alors la raison de la suite géométrique (u_n).

Exemple

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{3}{2^n}$. Montrer que (u_n) est géométrique. On précisera le premier terme et la raison.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2^n} = \frac{1}{2}u_n.$$

Par conséquent, la suite (u_n) est bien géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

! Une autre méthode (reposant aussi sur la définition) consiste à prouver que le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant, mais il faut s'assurer que les termes u_n ne s'annulent pas.

Propriété 1.1.6

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q :

A) ***Expression du terme général en fonction de** n :*

- *si le premier terme est u_0, alors :* $\boxed{u_n = u_0 q^n}$
- *si le premier terme est u_p $(p < n)$, alors :* $\boxed{u_n = u_p q^{n-p}}$

B) ***Somme des premiers termes :***
si S désigne la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q $(q \neq 1)$, alors :

$$\boxed{S = (1^{er} \text{ terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}}$$

1.2 Le raisonnement par récurrence

Introduction et intérêt du raisonnement par récurrence

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

En calculant les premiers termes de la suite, on peut donc émettre une conjecture quant à la forme du terme général u_n.
On a : $u_1 = 1$; $u_2 = 3$; $u_3 = 7$. Il semble que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n - 1$.
Pour confirmer une telle conjecture, il nous faut la démontrer.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété :

$$\mathscr{P}_n \ : \ u_n = 2^n - 1.$$

a) On démontre que $\mathscr{P}_0$ est vraie ; on a d'une part
$u_0 = 0$ (définition) et d'autre part $2^0 - 1 = 0$, donc $u_0 = 2^0 - 1$. La propriété est **initialisée**.

b) Supposons que pour un certain entier n, $\mathscr{P}_n$ soit vraie, c'est-à-dire qu'on ait $u_n = 2^n - 1$. Alors on a

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Ce qui veut dire tout simplement que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Ainsi, on vient de prouver que pour un entier n quelconque $\mathscr{P}_n$ entraîne $\mathscr{P}_{n+1}$. La propriété est **héréditaire**.

Conclusion : la propriété est **initialisée** et **héréditaire**, elle est donc vraie pour tout entier n.

■ Le principe de récurrence

Ce principe de démonstration par récurrence s'applique lorsqu'on cherche à démontrer qu'une propriété $\mathscr{P}_n$ dépendant d'un entier naturel n est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, n_0 étant un entier naturel donné.

Principe du raisonnement par récurrence 1.2.1

On considère une propriété $\mathscr{P}_n$. Pour démontrer que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, on procède en trois étapes :

A) ***Initialisation*** *: on montre que la propriété est vraie pour $n = n_0$, c'est-à-dire que $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie.*

B) ***Hérédité*** *: on démontre que :*

si *la propriété est vraie pour un entier $k \geqslant n_0$,* ***alors*** *elle est vraie pour l'entier suivant $k+1$.*
Autrement dit ***si*** *$\mathscr{P}_k$ est vraie* ***alors*** *$\mathscr{P}_{k+1}$.*

On dit que la propriété est **héréditaire** *à partir du rang n_0.*

C) ***Conclusion*** *:*

- *la propriété est initialisée,*
- *elle est héréditaire.*

Par conséquent[a] *$\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.*

a. Il est primordial que les **deux** conditions de ce principe soient réunies !

Exemple

Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a : $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Procédons donc par récurrence en posant pour $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n : 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

A) **Initialisation** : pour $n=1$, on démontre que $\mathscr{P}_1$ est vraie. On a

- d'une part, la somme vaut 1 ;
- d'autre part : $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$

Ainsi $\mathscr{P}_1$ est vraie. La propriété est donc initialisée.

B) **Hérédité** : soit k un entier fixé. On suppose que $\mathscr{P}_k$ est vraie,
c'est-à-dire que : $1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$, (**hypothèse de récurrence**).
On veut alors démontrer que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie $\left(\text{c'est-à-dire que : } 1+2+3+\cdots+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+(k+1) &= \underbrace{1+2+3+\cdots+k}+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)\\
&= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

C) **Conclusion** : la propriété est initialisée et de plus héréditaire, en vertu du principe de récurrence, $\mathscr{P}_n$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Ainsi :

$$\text{pour tout } n \geqslant 1, \qquad 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

EXERCICE

On considère une suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier n : $0 < u_n < 2$.

2) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

1.3 Limite d'une suite

On s'intéresse dans cette section au comportement d'une suite pour les très grandes valeurs de l'entier n (lorsque n tend vers l'infini). On parlera ainsi de la limite d'une suite (u_n) et on notera :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n}$$

Limite infinie

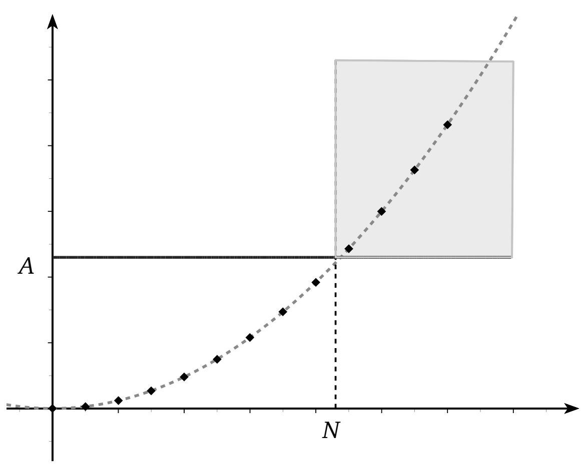
Définition 1.3.1

On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si, et seulement si, tout intervalle $]A;\infty[$ contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang N.

On note alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

*On dit que la suite (u_n) **diverge** vers $+\infty$.*



> **!**
> **1)** Cette définition traduit l'idée que les termes de la suite arrivent à dépasser A, aussi grand soit-il.
> **2)** Une suite peut ne pas avoir de limite. On dit qu'elle diverge. Par exemple $u_n = (-1)^n$.

◆ Limites de référence

Propriété 1.3.2

Les suites suivantes ont pour limite $+\infty$.

(a) $u_n = n$ **(b)** $v_n = n^2$ **(c)** $w_n = n^k \quad (k \geqslant 1)$ **(d)** $r_n = \sqrt{n}$

◆ Algorithmique : détermination d'un seuil

Dans ce paragraphe, on se propose d'utiliser un algorithme nous permettant de déterminer le seuil N à partir duquel tous les u_n sont supérieurs à un nombre donné A.

Soit la suite (u_n) définie par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \dfrac{7}{5}u_n + 2. \end{cases}$$

On montre facilement que cette suite est croissante et diverge vers $+\infty$ (faîtes le !). On voudrait déterminer à partir de quel entier N, u_n est supérieur à 2 000.

Le programme ci-contre permet de trouver N. On obtient alors : $N = 21$ et $u = 2337,71$.

Algorithme : recherche de seuil

Variables
  N, entier
  u, réel
début algorithme
  $u \longleftarrow -3$
  $N \longleftarrow 0$
  Tant que $u < 2\,000$ **faire**
    $u \longleftarrow \dfrac{7}{5}u + 2$
    $N \longleftarrow N + 1$
  Fin tant que
  Afficher N
  Afficher u
fin algorithme

■ Limite finie

Définition 1.3.3

On dit que la suite (u_n) a pour limite L si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang N. Un intervalle ouvert contenant L est de la forme $]L-\varepsilon ; L+\varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$. On note alors :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = L}$$

*On dit que la suite **converge** vers[a] L.*

a. Lorsqu'elle existe, cette limite est unique.