CHAPITRE I

Notions essentielles

1 Définitions

Un Réseau de Petri (RdP) est une structure graphique comportant un ensemble de places et de transitions, reliées par des arcs orientés, éventuellement porteurs de poids. Ces arcs sont des liens entre place et transition ou entre transition et place exclusivement. Dans cette structure se déplacent des jetons (ou marques) qui apparaissent dans les places et sont susceptibles de franchir les transitions selon certains critères de franchissabilité et de franchissement.

Les figures 1.1, 1.2 et 1.3 représentent de tels réseaux. Le premier représente un processus à deux états (Arrêt-Marche, par exemple). Dans le deuxième réseau, le passage d'un état à l'autre mobilise une ressource, symbolisée par le jeton contenu dans la place qui a été rajoutée à partir de la figure 1.1. Le troisième modèle peut représenter l'assemblage et le désassemblage successifs de deux éléments.

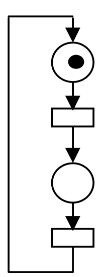

Figure 1.1

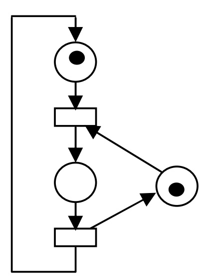

Figure 1.2

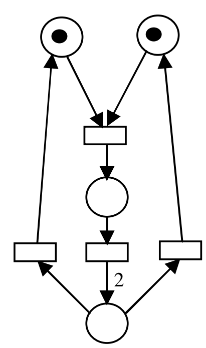

Figure 1.3

En général, les places sont repérées de P_1 à P_n et les transitions de T_1 à T_m. Les poids des arcs sont indiqués sur le modèle en regard des arcs. L'absence de notation signifie que l'arc en question est implicitement pondéré à 1.

1.1 Définition formelle

Un RdP est un quadruplet $Q = \langle P, T, Pré, Post \rangle$ tel que :

$P = \{Pi\}, i \in \{1,...,n\}$ est appelé ensemble de places

$T = \{Tj\}, j \in \{1,...,m\}$ est appelé ensemble de transitions avec $P \cap T = \emptyset$

Pré est une application de $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ dite d'incidence avant.

Post est une application de $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ dite d'incidence arrière.

Pré (P_i,T_j) est appelé poids de l'arc reliant P_i et T_j.

Post (P_i,T_j) est appelé poids de l'arc reliant T_j et P_i.

Cette définition permet d'aborder la description d'un RdP algébriquement et de transcrire chaque RdP sous forme de matrice W, dite d'incidence. L'évolution du marquage du RdP peut alors être observée. Le calcul algébrique est l'outil idéal pour gérer cette évolution de marquage. Chaque marquage et chaque séquence de franchissement sont représentés par un vecteur (dit de marquage, ou de franchissement). Ceci signifie que le réseau de Petri, est loin de n'être qu'un outil graphique. Avant d'aborder cette écriture, voici quelques définitions élémentaires.

1.2 Franchissabilité

Proposition 1 : Pour qu'une transition soit franchissable, il faut et il suffit que l'on trouve dans toutes les places immédiatement amont à cette transition, le nombre de marques correspondant au poids des arcs reliant respectivement chacune de ces places à cette transition.

1.3 Franchissement

Proposition 2 : Toute transition franchissable est immédiatement franchie.

Proposition 3 : La transition franchie distribue dans chacune des places immédiatement avales, un nombre de marques égal au poids de l'arc qui relie cette transition à chaque place avale respectivement.

Exemple

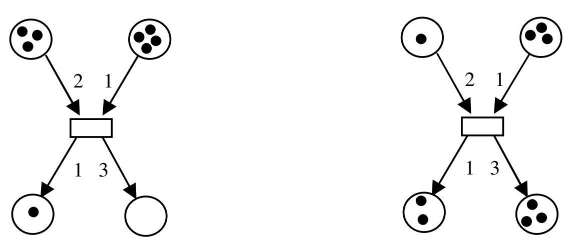

Figure 1.4 : Avant franchissement   Après franchissement

Les marquages sont les suivants :

Avant franchissement : $m(P1) = 3$; $m(P2) = 4$; $m(P3) = 1$; $m(P4) = 0$

Après franchissement : $m(P1) = 1$; $m(P2) = 3$; $m(P3) = 2$; $m(P4) = 3$

Remarques :

R(1) : Le franchissement d'une transition ne garantit pas la conservation de la quantité de marques globale. Dans l'exemple précédent, on a globalement un jeton de plus après franchissement de la transition.

Selon les poids attribués aux arcs liés à une transition donnée, les transitions sont : "Consommatrice", "Génératrice" ou "Conservatrice" de marques.

Soit une transition T reliée à un ensemble de places par n arcs amont et m arcs aval.

Soit Pré(i) le poids d'un arc amont i de la transition T.

Soit Post(j) le poids d'un arc aval j de la transition T.

Si $\sum_{n} \text{pré(i)} < \sum_{m} \text{post(j)}$, alors T est génératrice.

Si $\sum_{n} \text{pré(i)} > \sum_{m} \text{post(j)}$, alors T est consommatrice.

Si $\sum_{n} \text{pré(i)} = \sum_{m} \text{post(j)}$, T est conservatrice.

Exemple

Dans le RdP de la figure 1.5, la transition est génératrice de jetons :

$\sum_{n} \text{pré(i)} = 7$, $\sum_{m} \text{post(j)} = 8$ (celle-ci consomme 7 jetons et en restitue 8).

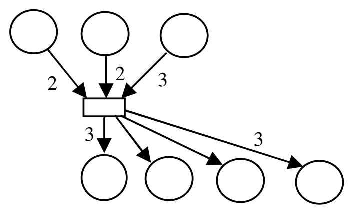

Figure 1.5 : Cellule génératrice

R(2) Les propositions P(1) et P(3) ne posent aucun problème, si ce n'est qu'elles sous-entendent les notions de transition génératrice ou consommatrice, donc que cela implique la création ou la disparition de jetons. Il apparaît alors que les jetons peuvent symboliser des objets physiques ou des états, des situations, des validations…

R(3) La proposition P(2) est plus critique, puisqu'il s'agit de conférer à une transition un temps de franchissement nul, ce qui n'est acceptable que du point de vue purement théorique et en dehors de toute réalité physique.

R(4) Dans le principe initial des RdP, rien n'interdit le franchissement simultané de deux transitions du même réseau. Or, la simultanéité de deux événements n'est pas cohérente pour le physicien.

1.4 Problèmes pratiques

Les protocoles de franchissement et les conditions de franchissabilité décrites précédemment ne prennent pas en compte la notion de temps. En effet, on fait évoluer le marquage d'un RdP sans prendre en compte ni la chronologie ni la durée des événements. Il est donc indispensable, pour l'application, de fixer un certain nombre de règles qui vont être décrites plus loin. Ces règles sont issues des contraintes temporelles imposées par les systèmes physiques. Elles sont issues des deux considérations suivantes :

- Tout événement a une durée non nulle.

- Deux événements indépendants ne peuvent être simultanés.

L'évolution du marquage dans un RdP, peut alors dépendre du temps de séjour dans une place ou du temps de franchissement d'une transition donnés.

1.5 Règles complémentaires

Les règles suivantes sont issues des remarques précédemment faites, regardant l'aspect temporel. Les propositions essentielles concernant ces points sont abordées ici, laissant délibérément de côté les définitions plus spécifiques qui seraient utiles pour des applications bien particulières.

Occurrences externes

La possibilité est offerte de conditionner le franchissement d'une transition à un événement externe (occurrence). Le nom de l'occurrence est alors spécifié en regard de la transition considérée. Il est alors nécessaire de proposer un chronogramme sur lequel figurent toutes les occurrences en fonction du temps (figure 1.6).

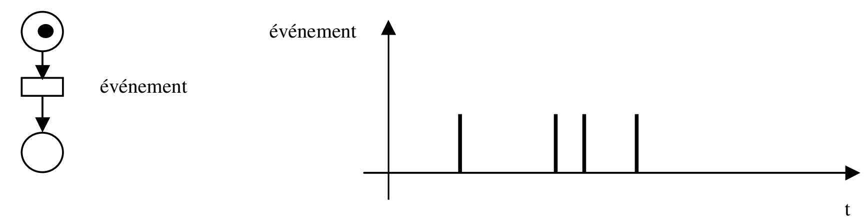

Figure 1.6 : Franchissement d'une transition soumise à un événement

Exemple

Deux occurrences externes sont attachées aux deux transitions du réseau de la figure 1.7. Le chronogramme associé fournit d'une part la définition des deux occurrences et d'autre part, le suivi du marquage des deux places qui s'ensuit, selon ces deux occurrences e_1 et e_2.

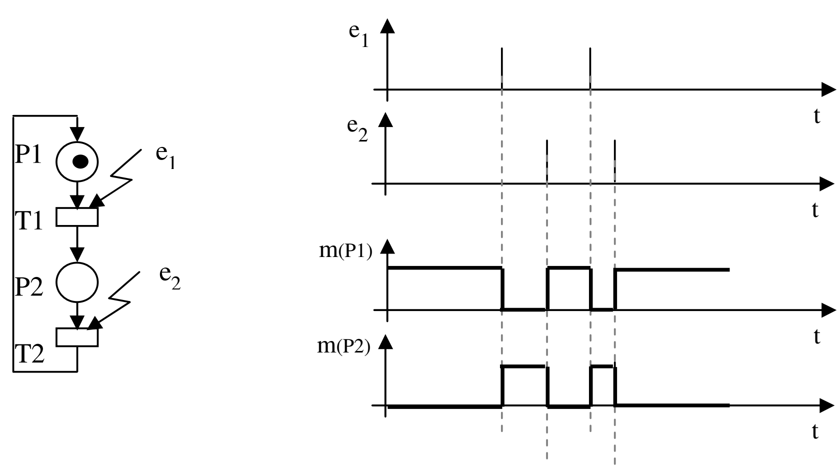

Figure 1.7 Réseau de Petri et chronogrammes de marquage associés

Temporisations

Il est également possible d'adjoindre une temporisation à une place, une transition ou un arc du RdP. Ainsi les marques sont maintenues dans une place pendant un certain temps τ avant tout franchissement de transition amont. On parle de RdP P-temporisé, T-temporisé, Arc-temporisé. Il faut noter que tout RdP T-temporisé peut se traduire en RdP P-temporisé et réciproquement. Ces réseaux de Petri nécessitent la définition d’une unité d’horloge.

La temporisation est indiquée en regard de l'élément temporisé. Conventionnellement, on ne peut pas trouver, au sein du même RdP, des places et des transitions temporisées.

Ainsi les temporisations permettent de rendre les modèles effectivement compatibles avec la réalité physique. Ce concept temporel est alors vu comme une couche complémentaire aux modèles initiaux.

Paradoxalement peut-être, la notion d’ordre mathématique, de chronologie, ne nécessitent pas a priori de définition d’horloge temporelle. Le temps devient alors un attribut complémentaire qui n’interfère pas nécessairement sur l’évolution des marquages.

Exemple

Soit le RdP P-temporisé de la figure 1.8a. Ce réseau a été choisi suffisamment simple pour fournir un exemple clair mais cependant significatif. Les places P1, P2, P3 sont respectivement temporisées à 2, 3 et 1 unités de temps, comme il est indiqué sur le modèle.

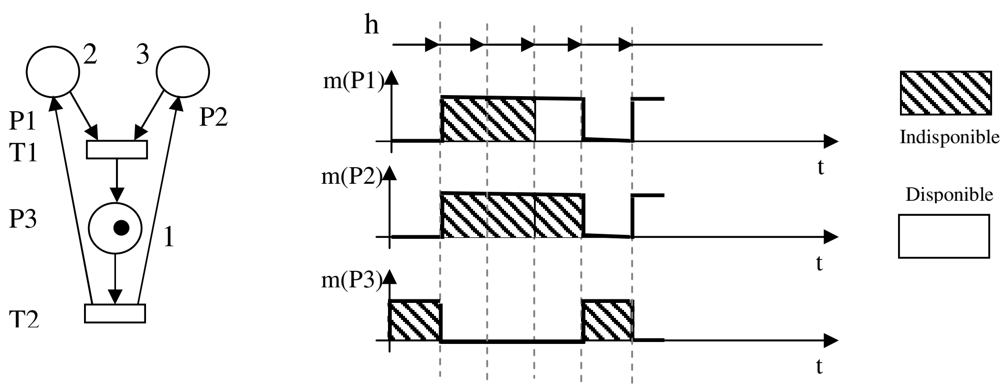

Figure 1.8a Réseau de Petri P-temporisé et chronogramme de marquage associé

Au début de la séquence, le jeton situé dans la place P3 y séjourne 1 unité de temps. T2 est franchie, distribuant un jeton dans chacune des places P1 et P2. Deux unités de temps plus tard, le jeton de P1 est disponible, mais ne peut franchir la transition T1 avant que le jeton de P2 soit disponible à son tour. T1 est alors franchie et l’on retrouve la situation initiale.

L’ordre des marquages est ici rigoureusement le même que celui qui serait obtenu sans temporisation. Cependant, une différence de comportement apparaît si l’état de disponibilité des jetons est considéré (ici, les jetons des places P1 et P2 ne sont pas tout le temps disponibles : le jeton de P1 est rendu disponible avant le jeton de P2 (temps d’horloge 4). Ainsi, si ce réseau est intégré dans un modèle plus important, les comportements globaux peuvent différer (figure 1.8 b).

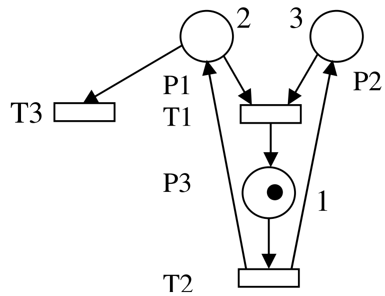

Figure 1.8b Réseau de Petri P-temporisé

Dans l'exemple de la figure 1.8b, le jeton qui apparaît dans la place P1 est capté par la transition T3 deux unités de temps après son arrivée dans cette place. Dans ce même réseau qui serait démuni de toute temporisation, la situation serait conflictuelle (ainsi que cela va être présenté plus loin § 1.6), et le marquage pourrait alors prendre deux évolutions différentes en fonction de la levée proposée pour ce conflit.

Exemple

De manière similaire, voici un RdP T-temporisé permettant de présenter le principe de cette structure. Le réseau a été choisi suffisamment simple pour fournir un exemple clair mais cependant significatif (figure 1.9).

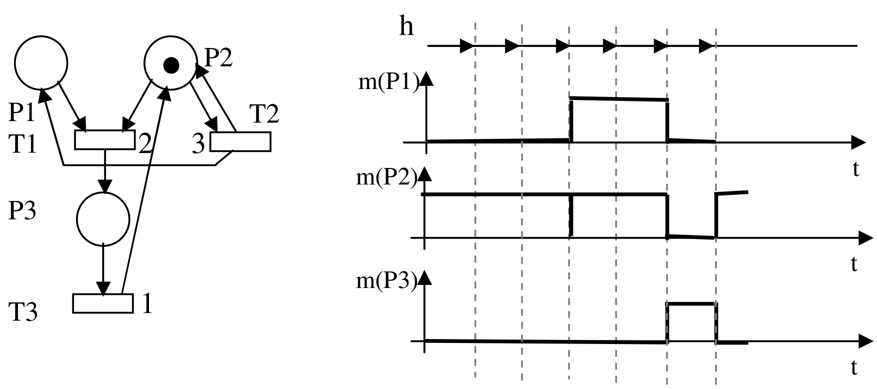

Figure 1.9 Réseau de Petri T-temporisé et chronogramme de marquage associé

Au début de la séquence, la transition T1 n'est pas validée (pas de jeton dans P1). La transition T2 est validée, mais temporisée à 3 unités. Lorsque les trois unités sont écoulées, T2 est franchie et restitue immédiatement le jeton à la place P2, tout en donnant un jeton à la place P1. Les transitions T1 et T2 sont alors validées, mais cette fois, T1 est prioritaire puisque sa temporisation n'est que de 2 unités de temps. T1 est alors franchie, fournissant un jeton à la place P3, jeton qui y séjourne une unité de temps. T3 est alors franchie et fournit un jeton en P2. Le cycle recommence.

Le même réseau non temporisé serait maintenant conflictuel, la place P2 comportant deux arcs de sortie. Le comportement serait alors peu intéressant : T2 pourrait être systématiquement validée au détriment de T1, générant ainsi un nombre sans cesse croissant de jetons en P1.

Diverses solutions sont maintenant abordées pour s'affranchir de ce type de problème conflictuel. D'ores et déjà, la temporisation peut être une première solution.

1.6 Situations conflictuelles

Ce problème est directement issu de la structure même des RdP et reflète parfaitement les situations possibles des systèmes que représentent les modèles. Toutefois, une distinction doit nécessairement être faite entre conflit structurel et conflit effectif.

Soient deux transitions T1 et T2 ayant en amont une place commune P (Figure 1.10) Si une marque est placée en P, elle valide immédiatement les deux transitions T1 et T2, qui doivent être franchies instantanément, d'après la proposition P(2). La même marque doit donc franchir simultanément T1 et T2, ce qui n'est pas acceptable. Il y a ici conflit structurel, tant qu'aucune marque n'a été placée en P, puis conflit effectif lors de l'apparition d'une marque en P. Par ailleurs, ce conflit est levé si l'une des deux places P1 ou P2 ne comporte pas de jeton.

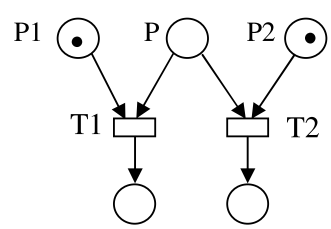

Figure 1.10 : Situation conflictuelle

Ce modèle peut effectivement évoquer une situation réelle, représentant par exemple le conflit effectif lors du partage d'une ressource commune entre deux entités (place P : robot sollicité par deux machines (places P1 et P2)). Le modèle doit aider à trouver des solutions pour lever ce conflit.

1.7 S'affranchir d'un conflit

Utilisation d'une temporisation

L'utilisation d'une T-temporisation peut permettre de lever un tel conflit. Un exemple en a été présenté dans le paragraphe précédent. A chaque transition en conflit est alors affectée une temporisation différente ($\tau_1 et \tau_2$), permettant alors un rapprochement de la description physique d'un système, où l'une des deux transitions est effectivement franchie au détriment de l'autre. La spécification de temporisations systématise cependant implicitement la priorité qui est donnée à l'une ou l'autre de ces transitions.

La figure 1.11 donne l'exemple d'un conflit levé par temporisation sur les transitions. Il faut veiller à ce que les temporisations n'entraînent pas la non vivacité du réseau (ce terme va être défini ultérieurement § 2.2). Dans ce RdP, la franchissabilité de T1 (resp T2) dépend du marquage de P et P1 (resp P et P2). Le franchissement éventuel de T1 (resp T2) intervient lorsqu'un temps τ_1 (resp τ_2) est écoulé après l'apparition d'une marque en P à partir du marquage initial proposé sur la figure.

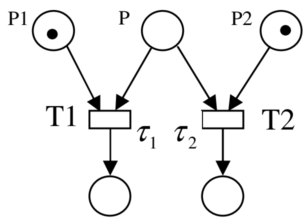

Figure 1.11 : Temporisation

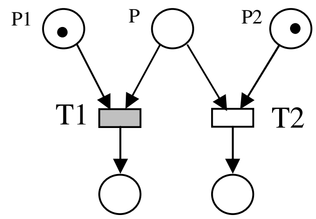

Figure 1.12 Priorité

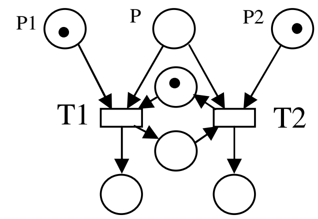

Figure 1.13 : Protocole

Règles de priorité

Si à présent un ordre de priorités sur les transitions en conflit est fixé, le problème est définitivement écarté. Il faut ici prendre garde, lors de la conception du RdP, à ne pas aboutir à la non vivacité d'une transition. Dans l'exemple précédent, en cas de conflit effectif, c'est à dire si chaque place est occupée par une marque, la priorité est donnée à la transition grisée T1 (figure 1.12).

Protocole

La figure 1.13 propose le protocole donnant alternativement l'avantage à la transition T1 ou à la transition T2. L'inconvénient de cette solution est que chaque transition ne peut être franchie deux fois successivement sans que l'autre n'ait été franchie. Cependant, cette restriction peut aussi être cohérente avec le cahier des charges. Ce type de solution peut répondre à toute sorte de protocole de distribution (chapitre II).

Contrainte sur le marquage

Il peut être prévu en amont de ce modèle qu'il n'y ait jamais simultanément de marques dans les places P1 et P2. Ainsi, le conflit structurel n'est jamais effectif. Cette solution ne peut être obtenue qu'en structurant en amont le réseau de Petri de manière adéquate : ceci mène à trouver une solution cohérente sur l'équipement que représente alors le modèle RdP.

Approvisionnement de la place P

Il peut également être prévu un nombre toujours suffisant de jetons dans la place P afin d'alimenter T1 et T2. La situation représentée par la figure 1.14 n'est pas conflictuelle, à la condition d'imposer une loi de partage équitable de marques entre les transitions en conflit structurel ce qui n'est pas du tout imposé par les règles de franchissement des transitions d'un réseau de Petri. Cette solution s'apparente à la précédente, en ce sens qu'elle se réfère à une élaboration du RdP en amont.