Chapitre I

Systèmes en boucle ouverte

1 Systèmes et fonctions de transfert

1.1 Formulation générale

Les systèmes considérés dans la première partie de cet ouvrage sont décrits par des équations différentielles linéaires à coefficients constants et réels. De tels systèmes peuvent être représentés par le schéma de la figure I.1, qui est appelé un *diagramme*.

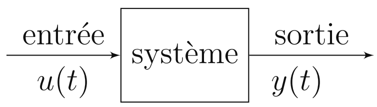

FIGURE I.1 – *Diagramme d'un système*

L'équation différentielle qui décrit le système est de la forme

$$y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}\dot{y}(t)+a_ny(t) = b_0u^{(m)}(t)+\cdots+b_{m-1}\dot{u}(t)+b_mu(t) \quad \text{(I.1)}$$

où $y^{(i)}(t)$ (respectivement $u^{(j)}(t)$) désigne la dérivée d'ordre i (respectivement d'ordre j), à l'instant t, du signal y (respectivement u). Les coefficients a_i, b_j sont des nombres réels. Le système (I.1) est dit *d'ordre* n.

1.2 Transformation de Laplace et fonction de transfert

La transformation de Laplace, notée $\mathscr{L}$, est très utile pour étudier une équation différentielle telle que (I.1) à partir d'un instant initial t_0, qu'on peut supposer égal à 0 sans perte de généralité. En effet, elle permet, à conditions initiales nulles, de substituer à la dérivée d'ordre i d'un signal x la multiplication par s^i de sa transformée $\hat{x}(s)$ [1], soit

$$\mathscr{L}\,[\dot{x}(t)] = s\,\hat{x}(s),\ \mathscr{L}\,[\ddot{x}(t)] = s^2\,\hat{x}(s),\ \mathscr{L}\,[\dddot{x}(t)] = s^3\,\hat{x}(s), \text{ etc...,} \quad \text{(I.2)}$$

qui est un objet mathématique plus commode à manipuler. On trouvera en annexe les propriétés essentielles de la transformation de Laplace (§1.1), ainsi que les transformées de Laplace usuelles (§3).

1. Cette notation varie suivant les auteurs. La "variable de Laplace" est parfois notée p au lieu de s (surtout dans les ouvrages en français). La transformée de Laplace du signal x peut également être notée $X(p)$. Nous éviterons cette notation qui peut provoquer des confusions dans la suite.

Considérons alors le système défini par l'équation différentielle (I.1). En supposant que *les conditions initiales de la sortie y et celles de l'entrée u sont nulles*, à savoir

$$\begin{aligned} y(0^-) = \dot{y}(0^-) = \cdots = y^{(n-1)}(0^-) = 0, \\ u(0^-) = \dot{u}(0^-) = \cdots = u^{(m-1)}(0^-) = 0, \end{aligned}$$

et en prenant la transformée de Laplace des deux membres de (I.1), on obtient d'après (I.2)

$$\begin{aligned} &s^n\, \hat{y}(s) + a_1\, s^{n-1}\, \hat{y}(s) + \cdots + a_{n-1}\, s\, \hat{y}(s) + a_n\, \hat{y}(s) \\ &\qquad = b_0\, s^m\, \hat{u}(s) + b_1\, s^{m-1}\, \hat{u}(s) + \cdots + b_{m-1}\, s\, \hat{u}(s) + b_m\, \hat{u}(s), \end{aligned}$$

soit donc

$$\big(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n\big)\, \hat{y}(s) = \big(b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m\big)\, \hat{u}(s). \tag{I.3}$$

On a obtenu une *relation de transfert.*

Fonction de transfert d'un système : considérons le système d'ordre n, d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$, décrit par l'équation différentielle (I.1). Alors, à conditions initiales nulles, les transformées de Laplace des entrée et sortie du système sont liées par la relation de transfert (I.3), qui s'écrit aussi

$$\hat{y}(s) = \mathrm{P}(s)\hat{u}(s) \tag{I.4}$$

où $\mathrm{P}(s)$, donnée par

$$\mathrm{P}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \text{ avec } A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n,\ B(s) = b_0 s^m + \cdots + b_{m-1} s + b_m, \tag{I.5}$$

est la *fonction de transfert du système.*

On a ainsi, grâce à la transformée de Laplace, remplacé l'équation différentielle d'origine (I.1) par la relation polynomiale (I.3) (ou (I.4), de manière équivalente), plus simple à manipuler.

Minimalité

Connaissant l'équation différentielle (I.1) d'un système, on détermine sa fonction de transfert (I.5) comme on l'a fait ci-dessus. Réciproquement, l'équation différentielle (I.1) est complètement déterminée par sa fonction de transfert (I.5) si, et seulement si les polynômes $A(s)$ et $B(s)$ sont premiers entre eux. Le système est alors dit *minimal*. Si ce n'est pas le cas, les termes communs à $A(s)$ et $B(s)$ se simplifient et modifient $G(s)$, ce qui ne permet pas de remonter ensuite à (I.1). Dans ce qui suit, *tous les systèmes sont supposés minimaux.*

Propreté

On dit qu'un système de fonction de transfert $\mathrm{P}(s) = B(s)/A(s)$ est *propre* si $m = d^\circ(B) \leq n = d^\circ(A)$, et *strictement propre* si $m < n$. En pratique, les systèmes que l'on rencontre sont tous propres, et même le plus souvent strictement propres, les systèmes impropres n'ayant qu'une existence purement mathématique. Voici pourquoi : on a représenté à la figure I.2 les réponses de deux systèmes, l'un propre et l'autre strictement propre. L'entrée, nulle pour $t < 0$, bascule brusquement à 1. Un tel signal, noté Υ, est appelé *fonction d' Heaviside*, ou plus communément *échelon* d'amplitude 1. Une telle entrée est discontine en $t = 0$. On observe alors qu'un système strictement propre, à cause de son "inertie", ne répercute pas sur sa sortie l'entrée discontinue qu'on lui applique, alors qu'un système bipropre (c'est-à-dire pour lequel $m = n$) le fait. Dans la nature, tous les systèmes ont une inertie. Ils seront donc tous supposés strictement propres (c'est le cas de (I.1)). En revanche, comme nous le verrons, les régulateurs proposés dans cet ouvrage sont souvent bipropres.

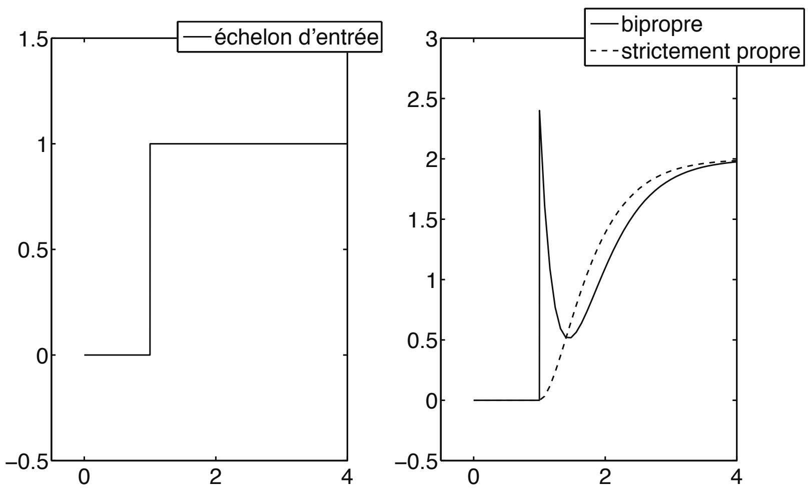

FIGURE I.2 – *Réponses d'un système bipropre et d'un système strictement propre.*

1.3 Pôles et zéros d'un système

Les pôles et zéros d'un système jouent un rôle important dans son comportement, et dans la conception d'une commande.

Pôles, zéros et ordre d'un système : soit le système décrit par l'équation différentielle (I.1), de fonction de transfert $\mathrm{P}(s) = B(s)/A(s)$. Alors

- Les *zéros* du système sont les racines du numérateur $B(s)$ de sa fonction de transfert.
- Ses *pôles* sont les racines du dénominateur $A(s)$.
- Le degré du dénominateur $A(s)$ est égal à l'ordre du système.

1.4 Stabilité d'un système

Soit le système décrit par l'équation différentielle (I.1). Appliquons une entrée u nulle. Le comportement de sa sortie, appelée alors *réponse libre*, est régi par l'équation différentielle

$$y^{(n)}(t) + a_1\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}\, \dot{y}(t) + a_n\, y(t) = 0. \tag{I.6}$$

Définition de la stabilité : considérons le système décrit par l'équation différentielle (I.1), et ses réponses libres $y(t)$, solutions de (I.6). On dira que ce système est

- *stable*, si les solutions de (I.6) vérifient toutes $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$,
- *marginalement stable*, si elles restent bornées,
- *instable*, si elles ne sont pas bornées.

Nous allons relier la stabilité d'un système à la position de ses pôles dans le plan complexe. Considérons pour simplifier un système d'ordre 2 décrit par l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) + a_1\,\dot{y}(t) + a_2\,y(t) = b_0\,\dot{u}(t) + b_1\,u(t),$$

et de fonction de transfert

$$\mathrm{P}(s) = \frac{b_0\,s + b_1}{s^2 + a_1\,s + a_2}\,\cdot$$

Sa réponse libre est solution de l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) + a_1\,\dot{y}(t) + a_2\,y(t) = 0. \tag{I.7}$$

En prenant la transformée de Laplace de (I.7) à conditions initiales quelconques, on a, d'après le tableau de la page 293,

$$\left[s^2\,\hat{y}(s) - s\,\dot{y}(0^-) - y(0^-)\right] + a_1\left[s\,\hat{y}(s) - y(0^-)\right] + a_2\,\hat{y}(s) = 0,$$

soit finalement

$$\hat{y}(s) = \frac{\dot{y}(0^-)\,s + (1 + a_1)\,y(0^-)}{s^2 + a_1\;s + a_2}\,\cdot \tag{I.8}$$

Soient p_1 et p_2 les pôles du système, racines de $s^2 + a_1\,s + a_2 = 0$. On distingue trois cas.

- Si p_1 et p_2 sont réels et distincts, la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle (I.8) permet d'écrire

  $$\hat{y}(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2}\,,$$

  où A_1 et A_2 dépendent des conditions initiales, et l'on obtient alors pour $t > 0$, en utilisant la table de transformées fournie en annexe au §3,

  $$y(t) = \left(A_1\,e^{p_1 t} + A_2\,e^{p_2 t}\right)\Upsilon(t).$$

  D'après la définition de la stabilité donnée plus haut, le système est stable dans le cas considéré si ses pôles sont strictement négatifs, marginalement stable si l'un au moins d'entre eux est nul, et instable si l'un au moins de ses pôles est strictement positif.

- Si p_1 et p_2 sont réels et confondus, la décomposition en éléments simples donne cette fois, en notant $p = p_1 = p_2$,

  $$\hat{y}(s) = \frac{A_3}{s - p} + \frac{A_4}{(s - p)^2}$$

soit, en utilisant la table, pour $t > 0$,

$$y(t) = \left(A_1\, e^{pt} + A_2\, te^{pt}\right) \Upsilon(t).$$

Le système est dans ce cas stable si son pôle double est strictement négatif, et instable s'il est nul ou strictement positif.

– Si enfin p_1 et p_2 sont complexes conjugués, on ne décompose pas en éléments simples mais on écrit (I.8) sous la forme

$$\hat{y}(s) = \frac{A_5\, s + A_6}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}$$

avec $A_5 = \dot{y}(0^-)$, $A_6 = (1 + a_1)\, y(0^-)$, $\alpha = \Re(p_1) = \Re(p_2)$ et $\omega = \Im(p_1) = -\Im(p_2) \neq 0$. Exprimons $\hat{y}(s)$ de manière à pouvoir utiliser la table de transformées, soit

$$\hat{y}(s) = A_5\, \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \omega^2} + \frac{A_6 + A_5\, \alpha}{\omega}\, \frac{\omega}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}\,,$$

d'où l'on déduit que, pour $t > 0$,

$$y(t) = \left(A_5\, e^{\alpha t} \cos \omega t + \frac{A_6 + A_5\, \alpha}{\omega}\, e^{\alpha t} \sin \omega t\right) \Upsilon(t).$$

Le système est donc stable si la partie réelle α de ses pôles est strictement négative, marginalement stable si elle est nulle, et instable si elle est strictement positive.

On peut étendre ces considérations à un système d'ordre quelconque, pour arriver à des conditions similaires.

Conditions de stabilité : considérons le système décrit par l'équation différentielle (I.1). Ce système est :

– stable si, et seulement si ses pôles appartiennent tous au demi-plan gauche

$$\mathbb{C}^- \triangleq \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) < 0\}\,, \tag{I.9}$$

– marginalement stable si, et seulement si ses pôles appartiennent tous au *demi-plan gauche fermé*

$$\overline{\mathbb{C}^-} \triangleq \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \leq 0\}\,, \tag{I.10}$$

ceux situés sur l'axe imaginaire étant *simples*,

– instable si, et seulement si le système a au moins un pôle dans le demi-plan droit

$$\mathbb{C}^+ \triangleq \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 0\}\,, \tag{I.11}$$

ou a un pôle multiple sur l'axe imaginaire.

Par abus de langage, on dira d'un pôle à partie réelle strictement négative qu'il s'agit d'un *pôle stable*. De manière analogue, on parlera d'un *pôle instable*. Le schéma de la figure I.3 résume les diverses situations rencontrées : les pôles (1) sont stables, les pôles (2) sont marginalement stables s'il s'agit de pôles simples et instables s'il s'agit de pôles multiples, les pôles (3) sont instables.

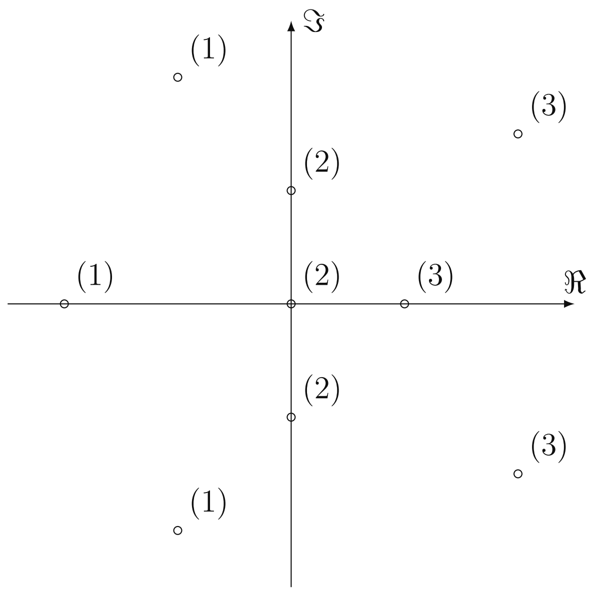

FIGURE I.3 – *Stabilité et position des pôles dans le plan complexe.*

1.5 Gain statique d'un système

Considérons de nouveau le système décrit par l'équation (I.1). A conditions initiales nulles, les entrée et sortie du système vérifient la relation de transfert (I.3). On peut alors montrer ([2], Théorème 589) que la réponse y du système à un échelon u d'amplitude quelconque est convergente si, et seulement si le système est stable. Il peut être alors intéressant de savoir vers quelle valeur converge cette sortie, appelée ici *réponse forcée*.

Pour cela, supposons que l'amplitude de l'entrée soit égale à $\mathbf{u}$, soit donc $u(t) = \mathbf{u}\,\Upsilon(t)$. Alors, d'après la table de transformées de Laplace, on a

$$\hat{y}(s) = \mathrm{P}(s)\,\hat{u}(s) = \mathrm{P}(s)\;\frac{\mathbf{u}}{s},$$

et le théorème de la valeur finale (annexe, §1.1) permet d'écrire

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{s \in \mathbb{R}, s \to 0^+} s\,\hat{y}(s) = \lim_{s \in \mathbb{R}, s \to 0^+} s\,\mathrm{P}(s)\,\frac{\mathbf{u}}{s} = \mathrm{P}(0)\,\mathbf{u}.$$

On vient de calculer le *gain statique* du système.

Gain statique d'un système : considérons le système décrit par l'équation différentielle (I.1), supposé stable (tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative) et de fonction de transfert $P(s)$.

Alors la réponse à un échelon d'amplitude $\mathbf{u}$ converge vers

$$\mathrm{P}(0)\,\mathbf{u}.$$

Pour cette raison, la quantité $\mathrm{P}(0)$ est appelée le *gain statique* du système.

2 Etude temporelle des systèmes

2.1 Systèmes du premier ordre

On considère ici un système du premier ordre régi par l'équation différentielle

$$\dot{y}(t) + a\,y(t) = b\,u(t). \tag{I.12}$$

Les coefficients a et b sont des nombres réels. En utilisant la transformation de Laplace, il vient d'après (I.2) si $y(0^-) = 0$,

$$s\,\hat{y}(s) + a\,\hat{y}(s) = b\,\hat{u}(s),$$

et par conséquent

$$\hat{y}(s) = \frac{b}{s+a}\,\hat{u}(s) = \mathrm{P}(s)\,\hat{u}(s). \tag{I.13}$$

La fraction rationnelle $\mathrm{P}(s)$ est la fonction de transfert du système, ici d'ordre 1. On suppose dans la suite qu'il s'agit d'un système stable, soit $a > 0$.

Supposons nulle la condition initiale $y(0^-)$ et intéressons nous à la réponse forcée du système à un échelon d'amplitude $\mathbf{u} = 1$, soit $u(t) = \Upsilon(t)$. Une telle réponse est appelée *réponse à l'échelon unité*, ou encore *réponse indicielle*. Puisqu'on a $\hat{u}(s) = 1/s$ d'après la table de transformées, on déduit de (I.13) que

$$\hat{y}(s) = \frac{b}{s\,(s+a)} = \frac{b}{a}\,(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a})\,\cdot$$

après décomposition en éléments simples. Par conséquent, d'après la table (annexe, §3), on a pour $t > 0$

$$y(t) = \frac{b}{a}\,(1 - e^{-at})\,\Upsilon(t).$$

Il est usuel de poser $\tau = 1/a$. En effet, $\tau > 0$ est alors une quantité homogène à un temps, et est appelée la *constante de temps* du système. En posant également $k = b/a = b\,\tau$, l'expression ci-dessus devient

$$\boxed{y(t) = k\,(1 - e^{-t/\tau})\,\Upsilon(t)} \tag{I.14}$$

tandis que la fonction de transfert s'écrit sous la forme "normalisée"

$$\boxed{\mathrm{P}(s) = \frac{k}{1+\tau s}\,\cdot} \tag{I.15}$$

On a d'après (I.14) $\lim_{t\to+\infty} y(t) = k = \mathrm{P}(0)$, ce qui corrobore la notion de gain statique défini à l'encadré de la page précédente, puisque $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \mathrm{P}(0)\,\mathbf{u} = \mathrm{P}(0)$. En outre, calculons le *temps de réponse à 95%* du système (noté $\mathrm{TR}_{95\%}$), temps au bout duquel sa sortie atteint une bande de $\pm 5\%$ autour de sa valeur finale sans en ressortir. On a ici

$$y(t) = 0,95\,k \Leftrightarrow k\,(1 - e^{-t/\tau}) = 0,95\,k \Leftrightarrow e^{-t/\tau} = 0,05 \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{TR}_{95\%} = -\tau\ln(0,05) \approx 3\,\tau.}$$

Enfin, on peut calculer que

$$\dot{y}(t) = -(-1/\tau)\, e^{-t/\tau}\, \Upsilon(t) \Rightarrow \boxed{\dot{y}(0^+) = 1/\tau.}$$

Résumons ce qui a été obtenu.

Système du 1er ordre : un système du premier ordre stable, décrit par l'équation différentielle (I.12), a pour fonction de transfert "normalisée" (I.15) avec $\mathrm{P}(0) = k = b/a$ son gain statique et $\tau = 1/a$ sa constante de temps. Sa réponse indicielle est donnée par (I.14), sa pente à l'origine est égale à $1/\tau$ et son temps de réponse à $3\,\tau$.

A titre d'exemple, on a représenté sur la figure I.4 la réponse indicielle de deux systèmes du premier ordre ayant un gain statique de 10 et deux constantes de temps différentes, l'une valant 10 s ('-'), l'autre valant 20 s ('- -')[2]. Les droites partant de l'origine permettent de visualiser la pente à l'origine mentionnée plus haut. Les temps de réponse sont de 30 et 60 s.

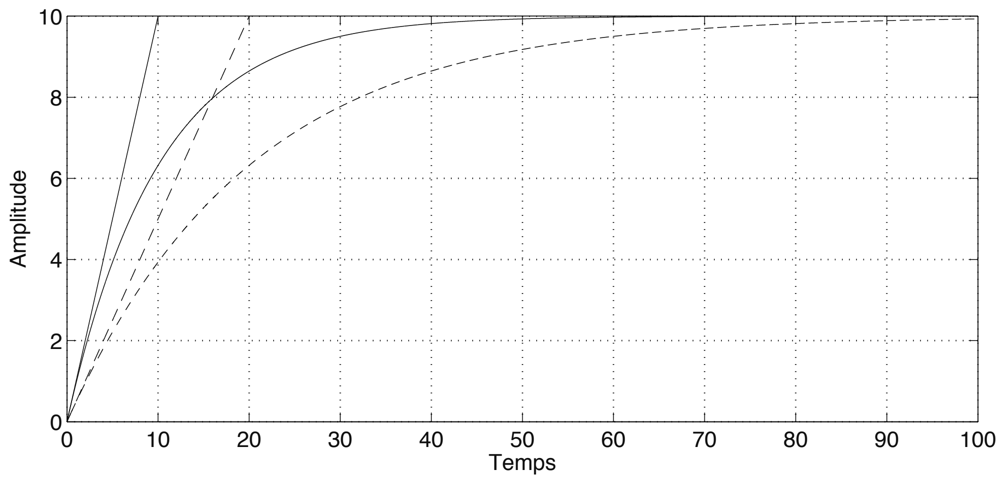

FIGURE I.4 – *Réponse indicielle d'un système du premier ordre.*

2.2 Systèmes du second ordre

Considérons le système du second ordre dont le comportement est régi par l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) + a_1\, \dot{y}(t) + a_2\, y(t) = b_0\, \dot{u}(t) + b_1\, u(t). \tag{I.16}$$

Les coefficients a_1, a_2, b_0 et b_1 sont des nombres réels. L'étude qui suit s'effectue sur le modèle de celle effectuée pour les systèmes du premier ordre. On verra que les résultats peuvent toutefois être fort différents. Utilisons de nouveau la transformation de Laplace. Il vient à conditions initiales nulles

$$s^2\, \hat{y}(s) + a_1\, s\, \hat{y}(s) + a_2\, \hat{y}(s) = b_0\, s\, \hat{u}(s) + b_1\, \hat{u}(s),$$

2. Trait plein et tirets, respectivement.