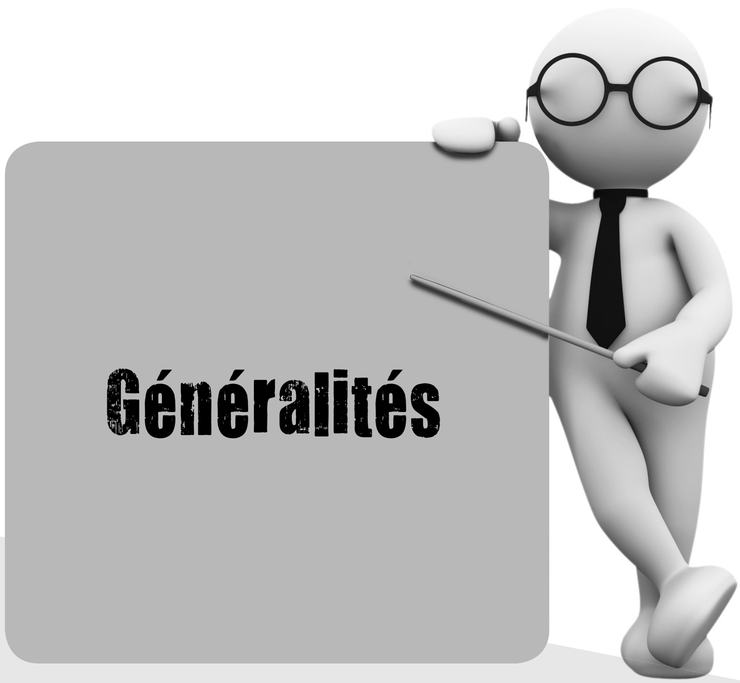
Généralités

Vérifier l'homogénéité d'une équation physique

Quand on ne sait pas !

- La dimension d'une grandeur physique A se note entre crochets.
- La dimension de la somme (ou de la différence) de deux grandeurs physiques A et B est égale à la dimension de A (et à la dimension de B) :

$$[A + B] = [A] = [B]$$

- La dimension du produit de deux grandeurs physiques A et B est égale au produit des dimensions de A et B :

$$[A \times B] = [A] \times [B]$$

- La dimension du quotient de deux grandeurs physiques A et B est égale au quotient des dimensions de A et B :

$$\left[\frac{A}{B}\right] = \frac{[A]}{[B]}$$

- La dimension de la puissance n-ième d'une grandeur physique A est égale à la puissance n-ième de la dimension de A :

$$[A^n] = [A]^n$$

- La dimension de la dérivée n-ième d'une grandeur physique A par rapport à B a pour dimension

$$\left[\frac{\mathrm{d}^n A}{\mathrm{d}B^n}\right] = \frac{[A]}{[B]^n}$$

- La dimension de l'intégrale d'une grandeur physique A par rapport à B a pour dimension

$$\left[\int A\mathrm{d}B\right] = [A] \times [B]$$

- L'argument des fonctions cosinus, sinus, tangente, exponentielle, logarithme,... n'a pas de dimension. Il en est de même pour une constante.

Que faire !

- Pour s'assurer qu'une équation est homogène, il suffit de vérifier que les deux membres de cette dernière ont même dimension. Par contraposition, si les deux membres de l'équation ont des dimensions différentes, elle est nécessairement fausse.
- Utiliser les propriétés précédentes et les sept dimensions fondamentales suivantes pour déterminer la dimension d'une grandeur physique quelconque : T (temps), L (longueur), M (masse), Θ (température), N (quantité de matière), I (intensité électrique) et J (intensité lumineuse).

Conseils

- Utiliser les formules les plus simples pour déterminer la dimension d'une grandeur quelconque. Par exemple

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad [v] = \frac{[x]}{[t]} = LT^{-1}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = \qquad \Rightarrow \qquad \left[\vec{F}\right] = [m][\vec{a}] = MLT^{-2}$$

$$\mathcal{E}_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad \left[\mathcal{E}_\mathrm{c}\right] = \left[\frac{1}{2}\right][m][v]^2 = ML^2T^{-2}$$

Exemple traité

Un pendule simple de masse m et de longueur l est placé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. Si l'angle n'est pas trop important, il oscille sinusoïdalement avec une pulsation propre ω_0 dont l'expression est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Vérifier l'homogénéité de cette formule.

SOLUTION

La pulsation propre ω_0 a pour unité rad.s^{-1} et elle est reliée à la période propre T_0 des oscillations par la relation :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \qquad \Rightarrow \qquad [\omega_0] = \left[\frac{2\pi}{T_0}\right] = \frac{[2\pi]}{[T_0]} = T^{-1}$$

De plus, puisque le champ de pesanteur est homogène à une accélération, il vient :

$$\left[\sqrt{\frac{g}{l}}\right] = \sqrt{\left[\frac{g}{l}\right]} = \sqrt{\frac{[g]}{[l]}} = \sqrt{\frac{LT^{-2}}{L}} = T^{-1}$$

Les deux membres ont même dimension. La relation est par conséquent homogène.

Exercices

EXERCICE 1.1

Un générateur idéal de tension de force électromotrice E alimente un circuit série constitué d'un condensateur de capacité C et d'un conducteur ohmique de résistance R. L'évolution temporelle de la charge $q(t)$ du condensateur, initialement déchargé, est

$$q(t) = CE\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad \text{avec} \quad \tau = RC$$

1 Déterminer la dimension du paramètre τ.

2 Vérifier l'homogénéité de la relation.

EXERCICE 1.2

Le satellite Io est en orbite circulaire de rayon R_{J} autour de Jupiter de masse M_{J}. Sachant que la constante de gravitation universelle $\mathcal{G}$ a pour dimension $L^3T^{-2}M^{-1}$, quelle est la période de révolution T_0 du satellite Io autour de Jupiter ?

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{G}M_{\mathrm{J}}}{R_{\mathrm{J}}}} \quad \text{ou} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{G}M_{\mathrm{J}}}{{R_{\mathrm{J}}}^3}} \quad \text{ou} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{{R_{\mathrm{J}}}^3}{\mathcal{G}M_{\mathrm{J}}}}$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 1.1 Ne pas oublier de vérifier que l'argument de l'exponentielle est sans dimension.

Solutions des exercices

EXERCICE 1.1

1 En utilisant les relations tension-intensité pour le condensateur et pour le conducteur ohmique, on a

$$u_R = Ri \qquad \text{et} \qquad i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

Ainsi

$$[RC] = [R][C] = \left[\frac{u_R}{i}\right]\left[\frac{i}{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}}\right] = \frac{[u_R]}{[i]}\frac{[i][t]}{[u_C]} = [t] = T$$

Par conséquent, la constante τ est homogène à un temps.

2 Par définition, l'intensité i du courant est égale à la dérivée de la charge q par rapport au temps. Il vient alors

$$[i] = \left[\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{[q]}{[t]} = \frac{[q]}{T} = I$$

La charge a donc pour dimension le produit d'une intensité I et d'un temps T. De la même manière, puisque l'argument de l'exponentielle est sans dimension, on a

$$\left[CE\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right] = [C][E]\left[1 - e^{-t/\tau}\right] = [C][E][1] = [C][E]$$

D'après la question précédente, on a vu que l'intensité du courant qui traverse un condensateur est égal au produit de la capacité C et de la dérivée temporelle de la tension u_C. Par conséquent

$$[i] = I = \left[C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right] = [C]\frac{[u_C]}{[t]} = [C]\frac{[u_C]}{T} \quad \Rightarrow \quad [C][u_C] = IT = [C][E]$$

On en déduit alors que

$$\left[CE\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right] = IT$$

Les deux membres ont la même dimension. L'équation est donc homogène.

EXERCICE 1.2

La période de révolution T_0 du satellite Io est homogène à un temps. Or, la première relation a pour dimension

$$\left[2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{J}}{R_\mathrm{J}}}\right] = [2\pi]\sqrt{\left[\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{J}}{R_\mathrm{J}}\right]} = \sqrt{\frac{L^3T^{-2}M^{-1}M}{L}} = LT^{-1}$$

Cette formule a la dimension d'une vitesse. La première équation n'est donc pas homogène. La seconde relation a pour dimension

$$\left[2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{J}}{{R_\mathrm{J}}^3}}\right] = [2\pi]\sqrt{\left[\frac{\mathcal{G}M_\mathrm{J}}{{R_\mathrm{J}}^3}\right]} = \sqrt{\frac{L^3T^{-2}M^{-1}M}{L^3}} = T^{-1}$$

Cette formule a la dimension d'une fréquence. La seconde équation n'est donc pas homogène. Enfin, la dernière relation a pour dimension

$$\left[2\pi\sqrt{\frac{{R_\mathrm{J}}^3}{\mathcal{G}M_\mathrm{J}}}\right] = [2\pi]\sqrt{\left[\frac{{R_\mathrm{J}}^3}{\mathcal{G}M_\mathrm{J}}\right]} = \sqrt{\frac{L^3}{L^3T^{-2}M^{-1}M}} = T$$

Cette formule est bien homogène à un temps. Elle correspond à la seconde loi de Kepler.

Résoudre une équation différentielle linéaire du 1er ordre

Quand on ne sait pas !

- Les solutions de l'équation différentielle homogène

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{f}{\tau} = 0$$

sont les fonctions f_1 telles que $\forall t$, $f_1(t) = Ae^{-t/\tau}$ où A est une constante réelle.

- Une solution particulière de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{f}{\tau} = \mathcal{C}$$

où $\mathcal{C}$ est une constante, est la fonction constante f_2 telle que $\forall t$, $f_2(t) = \mathcal{C}\tau$.

Que faire !

- Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre, il suffit de
  - Trouver toutes les solutions de l'équation homogène f_1.
  - Trouver une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre f_2.
  - Sommer les solutions de l'équation homogène et la solution particulière $f = f_1 + f_2$.
  - Utiliser la condition initiale $f(0)$ pour déterminer la constante A.

Conseils

- Mettre sous forme canonique l'équation différentielle en faisant apparaître le temps caractéristique τ.
- Sauf mention contraire, il n'est pas nécessaire de redémontrer les solutions de l'équation homogène.
- Dans la méthode de résolution, il faut toujours finir par la condition initiale. En particulier, il faut veiller à ne pas utiliser la condition initiale juste après l'écriture de la solution de l'équation homogène.

Exemple traité

Dans un circuit RC série alimenté par un générateur idéal de tension de force électromotrice E, la tension u_C aux bornes du condensateur, initialement déchargé, vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

Sachant que $u_C(0^+) = 0$, déterminer l'évolution temporelle de la tension u_C.

SOLUTION

En posant $\tau = RC$, l'équation différentielle s'écrit sous la forme canonique suivante

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

Les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions u_{C_1} telles que $\forall t$, $u_{C_1}(t) = Ae^{-t/\tau}$ où A est une constante réelle. Une solution particulière de l'équation différentielle est la fonction u_{C_2} telle que $\forall t$, $u_{C_2}(t) = E$. Par conséquent la solution générale de l'équation différentielle est la fonction u_C telle que, pour tout réel t :

$$u_C(t) = Ae^{-t/\tau} + E$$

où A est une constante réelle déterminée à l'aide de la condition initiale. Le condensateur étant initialement déchargé, il vient, par continuité de la tension aux bornes de ce dernier, $u_C(0^+) = 0$. Ainsi $A + E = 0$, d'où $A = -E$. La solution de l'équation différentielle est :

$$u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Exercices

EXERCICE 2.1

Une balle de masse m, assimilée à un point matériel, chute dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ avec une vitesse initiale $\vec{v}(0) = -v_0\vec{e_z}$ ($v_0 > 0$). Si elle subit une force de frottement visqueux avec l'air $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, sa vitesse $\vec{v} = v\vec{e_z}$ vérifie l'équation différentielle :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \lambda v = -mg$$

Déterminer la vitesse v de la balle en fonction du temps.

EXERCICE 2.2

On considère une tige métallique de longueur L, de masse m et de résistance r qui peut se déplacer rectilignement. Elle est déposée sur des rails métalliques alimentés par un générateur de force électromotrice E. L'ensemble du circuit est soumis à un champ magnétique $\vec{B}$. L'équation différentielle vérifiée par la vitesse de la tige, initialement immobile, est :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{B^2L^2}{rm}v + \frac{EBL}{rm}$$

Déterminer la vitesse v de la tige en fonction du temps.

Solutions des exercices

EXERCICE 2.1

En posant $\tau = \frac{m}{\lambda}$, l'équation différentielle s'écrit sous la forme canonique suivante

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau} = -g$$

Les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions v_1 telles que $\forall t$, $v_1(t) = Ae^{-t/\tau}$ où A est une constante réelle. Une solution particulière de l'équation différentielle est la fonction v_2 telle que $\forall t$, $v_2(t) = -g\tau$. Par conséquent la solution générale de l'équation différentielle est la fonction v telle que, pour tout réel t :

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} - g\tau$$

La vitesse initiale de la balle étant $-v_0$, il vient, $A - g\tau = -v_0$, d'où $A = g\tau - v_0$. La solution de l'équation différentielle est finalement :

$$v(t) = g\tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right) - v_0 e^{-t/\tau}$$

EXERCICE 2.2

En posant $\tau = \frac{rm}{B^2L^2}$, l'équation différentielle s'écrit sous la forme canonique suivante

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau} = \frac{E}{BL\tau}$$

Les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions v_1 telles que $\forall t$, $v_1(t) = Ae^{-t/\tau}$ où A est une constante réelle. Une solution particulière de l'équation différentielle est la fonction v_2 telle que $\forall t$, $v_2(t) = \frac{E}{BL}$. Par conséquent la solution générale de l'équation différentielle est la fonction v telle que, pour tout réel t :

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{E}{BL}$$

La tige étant initialement immobile, il vient $A + \frac{E}{BL} = 0$, d'où $A = -\frac{E}{BL}$. La solution de l'équation différentielle est finalement :

$$v(t) = \frac{E}{BL}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$