

Préface

La vie quotidienne de chacun d'entre nous est remplie d'ondes. Le son et la lumière nous permettent de communiquer. Les ondes sont à notre service. Les micro-ondes ont trouvé leur place familière dans nos cuisines et font fonctionner nos téléphones portables. On ne peut plus imaginer un monde sans lasers. Notre compréhension approfondie des rayons X, des ultrasons, et de la lumière infrarouge sert au diagnostic médical, et sauve des vies tous les jours. Des outils comme le radar, le sonar et le lidar, dont le principe est basé sur la physique des ondes, ont augmenté considérablement la capacité de l'homme à « télé détecter », à prédire la météo, ou à se défendre. Hélas, les ondes interviennent aussi régulièrement de façon destructive. On peut citer les dégâts accomplis par les ondes sismiques émises par un tremblement de terre, les inondations provoquées par un tsunami, ou encore l'effet désastreux des rayons ultraviolets sur la peau.

Le concept « onde » a toujours joué un rôle important en physique. Dans le passé, l'omniprésence des ondes a principalement motivé les scientifiques à comprendre l'« onde », quelle que soit sa nature. Ils ont développé des mathématiques sophistiquées afin de modéliser sa propagation. Les grands travaux de Christiaan Huygens, Sir Isaac Newton, Augustin Jean Fresnel, Lord Rayleigh et James Clerk Maxwell en ont résulté et font maintenant partie des connaissances obligatoires d'un physicien professionnel. Les astrophysiciens sont obligés de se confier aux ondes électromagnétiques de toute fréquence pour comprendre les structures et les processus à l'intérieur des étoiles. De même, la structure de la Terre, de la croûte jusqu'à la graine interne, a été déduite en se basant sur les ondes élastiques qui se propagent partout dans la Terre. Mais un niveau sans précédent fut atteint au XX^e siècle. La mécanique quantique nous révéla le comportement ondulatoire de toute matière, des électrons jusqu'aux systèmes macroscopiques. Il y a à peine 10 ans, les condensats de Bose-Einstein se sont manifestés comme des ondes « presque banales », bien que non linéaires. Le mystère de « la fonction d'onde de l'Univers », créé par la mécanique quantique, ne sera pas réglé demain, mais la question est posée. Enfin, un de nos plus grands défis scientifiques à ce jour est la détection des ondes gravitationnelles. Elles ont été prédites par la relativité générale mais n'ont jamais été mesurées directement.

Le rôle déterminant que les ondes jouaient, jouent et joueront dans de nombreux domaines en science justifie largement une bonne formation de la jeune génération, de préférence dès le début des études universitaires afin qu'elle puisse servir pour les cours suivants. Le livre *Vibrations, ondes* rédigé par mes collègues Jean MATRICON et Janine BRUNEAUX, répond exactement à ce besoin. Après une introduction historique, on reprend le concept d'onde tout à la base, c'est-à-dire au niveau de l'oscillateur harmonique.

Les concepts caractéristiques des ondes sont introduits de façon pédagogique. Les outils mathématiques indispensables pour décrire leur propagation sont discutés, de la transformée de Fourier au principe de Huygens jusqu'au théorème de Green. Sont introduites les ondes électromagnétiques, les ondes acoustiques et élastiques, et les ondes de surface. Quelques applications soigneusement sélectionnées ont été abordées, comme les échelles musicales, les vagues solitaires (à l'origine des tsunamis), et la résonance magnétique nucléaire.

En regardant les différentes thématiques traitées, on ressent l'omniprésence des ondes. Le livre nous offre une vision large de la description des ondes, quelle que soit leur nature, mais sans perdre de vue les détails spécifiques. La porte a été ouverte aux approches plus avancées, tel que le comportement non linéaire et la deuxième quantification. C'est un livre idéal pour guider les premiers pas de physique à l'université, avant l'apprentissage de la mécanique quantique et des phénomènes plus fléchés, et il servira encore longtemps après dans toutes les filières en physique.

Grenoble, Janvier 2006

Bart VAN TIGGELEN
Directeur de recherche au CNRS
Chargé de cours à l'Ecole Normale de Lyon

Avant-propos

L'onde était transparente ainsi qu'aux plus beaux jours
La Fontaine

L'image qu'on associe le plus spontanément au mot « onde » est la petite ride qui se propage à la surface d'une flaque d'eau lorsqu'on y jette un caillou et l'étymologie nous le confirme : *unda* en latin, c'est l'eau courante. Aujourd'hui, notre monde technologique est rempli d'ondes de toutes sortes, bénéfiques ou maléfiques, que nous créons en permanence ou qui nous arrivent du fond de l'Univers. Et ce même mot « onde », qui, il y a peu de temps encore avait une connotation essentiellement poétique, est devenu porteur d'une symbolique plus inquiétante que rassurante, même si chacun sait que ce sont des ondes qui lui assurent une communication quasi instantanée avec le reste du monde.

Parmi tous les concepts qui fondent la physique, celui d'onde est un des rares que la science grecque antique, si riche par ailleurs, ait complètement ignoré. Dans ce pays où l'eau est omniprésente, et où les vagues et la houle sont vécues au quotidien, il ne semble pas que l'idée abstraite d'onde, qui implique un mouvement sans modification durable du milieu traversé, ait émergé. Autant l'acoustique, en particulier celle des instruments à corde, avait connu depuis Pythagore un engouement constant, et une mathématisation assez poussée, autant les mécanismes par lesquels le son allait de la corde à nos oreilles ont été ignorés. Il y eut cependant de remarquables travaux en acoustique architecturale, comme en témoigne l'extraordinaire clarté sonore des amphithéâtres.

On décrivait bien le mouvement d'objets matériels, massifs, tels la flèche de Zénon, mais ni la propagation de la lumière, ni celle du son n'étaient associées à un quelconque « mouvement ». Le tournant se fait au XVII^e siècle avec le Père Marin Mersenne (1588-1648), qui comprend la nature ondulatoire du son, dont il mesure la vitesse, et Christiaan Huygens (1629-1695), dont le nom reviendra maintes fois dans cet ouvrage, qui invente la notion d'onde lumineuse, et en fait d'emblée un outil efficace. A partir de ces premiers résultats, la notion d'onde se développe et se raffine. L'idée que l'information que porte l'onde se propage avec une vitesse finie est confirmée par des mesures de cette vitesse (Rømer en 1676).

Du XVII^e siècle à nos jours, la notion d'onde va se généraliser et s'appliquer à de nouveaux phénomènes, parfois à travers des luttes mémorables. L'exemple de la lumière, qu'Isaac Newton (1642-1727) interprète comme portée par des particules et non des ondes, est resté célèbre : outre les rivalités d'école auxquelles il a servi de prétexte, il a incité les physiciens du XIX^e siècle, surtout Thomas Young (1773-1829) et Augustin Fresnel (1788-1827) à en prouver le caractère ondulatoire par des expériences toujours spectaculaires.

Ce n'est pas tout de montrer qu'un phénomène est associé à une onde, il faut aussi

établir quelle est la nature de cette onde. Pour l'acoustique, le rôle de l'air fut mis en évidence dès le XVII^e siècle par Robert Boyle (1627-1691) : il montra qu'une cloche cesse d'être audible lorsqu'on fait le vide autour d'elle, ce qui prouve que le son est une vibration de l'air se propageant de proche en proche, comme le fait une vague sur l'eau.

La nature de la lumière ne fut établie qu'à la fin du XIX^e siècle par James Clerck Maxwell (1831-1879) grâce à sa théorie électromagnétique, et tout fut remis en question par Albert Einstein (1879-1959) lorsqu'il prouva que la lumière était portée simultanément par une onde et par des corpuscules ; il n'était même pas nécessaire de recourir à un hypothétique « éther » pour la propagation de la partie onde. Cette association d'une onde à une particule devint avec Louis de Broglie (1892-1987) la clé de la nouvelle description quantique de la matière. Le XX^e siècle a vu d'autres types d'ondes apparaître, dont certaines, comme les ondes gravitationnelles, sont à ce jour encore purement hypothétiques, mais de gigantesques détecteurs en cours d'achèvement partent sur leurs traces.

Le but du présent ouvrage n'est pas de donner une description exhaustive de tous les types d'ondes connus à ce jour. Seules y figurent celles qui relèvent d'une description « classique », même si cette description ne peut être que partielle pour certaines d'entre elles. Le point de vue adopté consiste à recenser dans un premier temps tout ce que les différents types d'ondes ont en commun, à commencer par le caractère vibratoire du système qui les engendre. Les chapitres 1, 2 et 3 contiennent des rappels sur les systèmes vibrants, ainsi que des compléments permettant d'envisager ces « vibrateurs » comme des systèmes physiques et non comme des objets abstraits. Le chapitre 4 donne quelques outils mathématiques ainsi que des notions sur des objets conceptuels (traitement du signal) qui permettent d'englober dans un même cadre descriptif des phénomènes de natures très différentes. Le chapitre 5 rappelle quelques notions de base de l'électromagnétisme.

Le chapitre 6 est une approche paradigmatique du phénomène ondulatoire, qui cherche à modéliser le concept d'onde dans une description générale s'appliquant à tous les types d'ondes abordés par la suite. Les chapitres 7 à 11 explorent chacun un système physique spécifique et décrivent les ondes qui le parcourent, et leurs interactions avec le milieu : ondes sonores et acoustique (en particulier l'acoustique musicale), ondes à la surface d'un liquide et dans les milieux rigides, enfin ondes électromagnétiques, en particulier les ondes lumineuses. Le dernier chapitre développe quelques aspects de l'interaction entre les ondes électromagnétiques et la matière.

Au long des chapitres, quelques expériences simples sont proposées. Elles ne nécessitent jamais un équipement scientifique sophistiqué et sont faciles à réaliser. Leur interprétation peut rendre lumineuses des propriétés qu'une équation ne suggère pas forcément d'emblée. L'ouvrage se termine par quelques exercices avec solution, classés par chapitre, qui permettent d'aborder des applications simples, en général très classiques, des sujets traités dans le chapitre correspondant.

La trame de ce livre repose sur un enseignement que les auteurs ont dispensé pendant une vingtaine d'années aux étudiants en seconde année de DEUG et en licence de physique à l'université Paris 7 Denis Diderot. Parmi les multiples sources de référence, les auteurs tiennent à souligner l'importance de deux ouvrages fondateurs, le tome "Waves", volume 3 du Berkeley Physics course, rédigé par Franck S. Crawford Jr., édité chez McGraw-Hill et l'incontournable "Feynman Lectures on Physics", édité chez Addison-Wesley.

Les auteurs souhaitent remercier tous ceux de leurs collègues qui ont accepté de compléter leurs notes et de relire leur manuscrit, en particulier Christian Ricolleau, Yves Delaval et Michael Bazot.

Chapitre 1

Oscillateurs simples

C'est au cours de ses études de médecine, dans les années mille cinq cent quatre-vingt, pendant les offices religieux, que Galilée découvre l'isochronisme des petites oscillations d'un pendule ; en utilisant son pouls, seul moyen à l'époque de chronométrer, il mesure la durée des oscillations du lustre dans la cathédrale de Pise, et observe que la période du pendule (le temps d'un aller-retour) ne dépend pas de l'amplitude des oscillations.

1.1 Les systèmes isolés

1.1.1 Quelques oscillateurs harmoniques simples

Expérience 1 : une masse et un ressort en oscillation verticale

On attache, par exemple au plafond, l'une des extrémités d'un ressort. On note la longueur du ressort, puis on attache une masse m à l'extrémité libre et on note la distance au plafond de la position d'équilibre de la masse.

On déplace la masse d'une petite distance vers le bas par rapport à la position d'équilibre ; on la lâche et on constate qu'elle oscille autour de la position d'équilibre.

On déplace la masse d'une distance plus grande par rapport à la position d'équilibre ; on la lâche et on constate qu'elle oscille toujours autour de la position d'équilibre avec une plus grande amplitude, mais la même période.

Expérience 2 : le pendule simple

On prend un pendule simple constitué d'un fil d'environ un mètre de longueur et d'une masse m . On attache l'extrémité libre à un point fixe, par exemple au plafond. On lâche le pendule avec une faible amplitude : on constate qu'il oscille avec une période de l'ordre de 2 secondes.

a) Une masse suspendue à un ressort

Décrivons (figure 1-1) la dynamique d'un objet M de masse m suspendu à l'extrémité inférieure d'un ressort dont l'extrémité supérieure est fixée en A , par exemple au plafond.

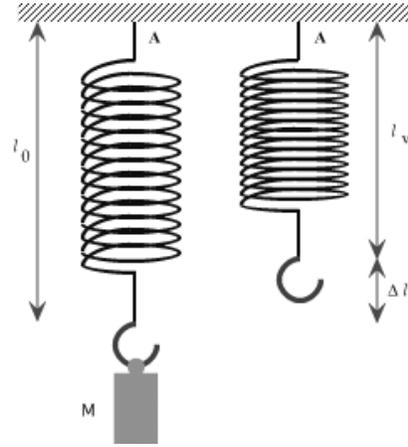


Figure 1-1

Lorsqu'on applique une force longitudinale F_a , le ressort se déforme en compression ou en extension selon le sens de la force ; nous supposons que la déformation du ressort obéit à la loi de Hooke : son amplitude $\Delta\ell$ est strictement proportionnelle à F_a , ce qui s'écrit $\Delta\ell = F_a/k$, k étant la constante de raideur du ressort qui se mesure en Nm^{-1} .

En absence de la masse M , le ressort, supposé de masse négligeable, a une longueur à vide ℓ_v . Si on suspend la masse M , sous l'effet de la force de pesanteur $F_a = mg$, le ressort s'allonge jusqu'à la position d'équilibre et sa nouvelle longueur ℓ_0 est telle que : $F_a = mg = k(\ell_v - \ell_0)$

Si on tire la masse M vers le bas et qu'on la lâche, elle se met à osciller verticalement autour de sa position d'équilibre. La période T du mouvement se mesure facilement entre deux passages de la masse à l'un des points extrêmes de son oscillation. Si on remplace la masse M par une masse quatre fois plus grande, on constate que l'allongement du ressort est bien sûr quatre fois plus grand, mais que la période est seulement le double. C'est un problème à une dimension et un seul degré de liberté.

α) Mise en équation

On écarte M de sa position d'équilibre et on abandonne le système à lui-même. La masse se met à osciller. Nous pouvons faire le bilan des forces appliquées au système. Les forces verticales qui s'exercent sur l'objet de masse m sont le poids et la force de rappel du ressort. Si ℓ est la longueur instantanée du ressort, mg le poids et $k(\ell - \ell_v)$ la force de rappel, l'équation du mouvement est :

$$m \frac{d^2\ell}{dt^2} = mg - k(\ell - \ell_v) = k(\ell_v - \ell_0) - k(\ell - \ell_0) + k(\ell_0 - \ell_v) = -k(\ell - \ell_0)$$

et en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ où ω_0 est la « pulsation » du mouvement, on a :

$$\frac{d^2\ell}{dt^2} + \omega_0^2 (\ell - \ell_0) = 0 \quad (1.1)$$

Avec $u = (\ell - \ell_0)$ et comme $\frac{d^2 \ell}{dt^2} = \frac{d^2(\ell - \ell_0)}{dt^2}$, on a : $\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0$

Cherchons pour l'équation sans second membre, une solution de la forme :

$$u(t) = Ae^{rt}; \text{ on a : } \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = r^2 Ae^{rt}$$

En reportant dans l'équation différentielle, on obtient l'équation caractéristique :

$$r^2 + \omega_0^2 = 0, \text{ qui a pour solution : } r = \pm i\omega_0$$

La solution générale est : $u(t) = \alpha e^{i\omega_0 t} + \beta e^{-i\omega_0 t}$

$u(t)$ est réel puisque c'est une quantité physique, donc α et β sont complexes conjugués, c'est-à-dire que $\alpha = a + ib$ et $\beta = a - ib$ avec a et b réels.

Cette solution peut s'écrire sous la forme $u(t) = B \cos(\omega_0 t) + C \sin(\omega_0 t)$ ou encore $u(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ où les coefficients B, C, A et φ sont réels.

Il s'agit d'un mouvement périodique de période : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

La *fréquence propre* du système masse-ressort est donnée par : $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

On trouve finalement : $\ell = \ell_0 + A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

C'est cette forme qui fait le mieux apparaître les caractéristiques essentielles du mouvement : A est l'amplitude et φ la phase (à l'instant $t = 0$). L'objet oscille indéfiniment autour de sa position d'équilibre à l'extrémité du ressort.

On a obtenu ici l'équation différentielle caractéristique d'un **oscillateur harmonique conservatif**. Quelle que soit la forme choisie pour la solution, les deux constantes sont déterminées à partir de la connaissance des conditions initiales (position et vitesse initiales ou positions à deux instants différents ou vitesses à deux instants différents ou position à un instant et vitesse à un autre).

Par exemple, si la masse est lâchée à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale à la distance a de sa position d'équilibre, on a, à l'instant $t = 0$:

$$\ell = \ell_0 + a \cos \varphi = \ell_0 + a, \quad \cos \varphi = 1 \quad \text{et} \quad \varphi = 0$$

L'équation du mouvement est :

$$\ell = \ell_0 + a \cos(\omega_0 t) \quad (1.2)$$

Si par contre la vitesse initiale de la masse à sa position d'équilibre n'est pas nulle, on a, à l'instant $t = 0$: $\ell = \ell_0 + a \cos \varphi = \ell_0, \quad \cos \varphi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi = \pi/2$

L'équation du mouvement est alors :

$$\ell = \ell_0 + a \cos(\omega_0 t + \pi/2) = \ell_0 + a \sin(\omega_0 t) \quad (1.3)$$

β) Paramètres négligés et hypothèses simplificatrices

On néglige la masse du ressort, tous les frottements et tous les termes non harmoniques, par exemple ceux qui découleraient d'une réaction non linéaire du ressort lors de l'étirement : on admet que le ressort exerce sur M une force de rappel \vec{F} de module proportionnel à son allongement (loi de Hooke), ce qui est vrai tant que la déformation du ressort demeure élastique, c'est-à-dire qu'on ne dépasse pas une valeur limite caractéristique du ressort.

γ) Exemple : suspension automobile

Dans une voiture, plusieurs ressorts permettent de suspendre la caisse à une altitude adéquate et de contrôler la fréquence et l'amplitude de ses déplacements.

- La raideur des ressorts dépend de leur longueur : si K est la raideur d'un ressort de longueur ℓ , celle de la moitié $\frac{\ell}{2}$ sera égale à $2K$.

- Quatre ressorts identiques de raideur K supportant une même masse auront une raideur équivalente à $4K$; en revanche, la raideur équivalente de quatre ressorts mis bout à bout est égale à $\frac{K}{4}$.

Les ressorts sont généralement choisis pour que la fréquence de suspension soit proche de 1 Hz. Si la voiture a une masse $m = 1600$ kg, la raideur de chacun des quatre ressorts de suspension est donc donnée par : $\omega_o^2 = \frac{4K}{m}$ ou $K = \frac{m\omega_o^2}{4} = \frac{m(2\pi)^2}{4} \approx 16 \cdot 10^3$ N/m

Avec 5 passagers (80 kg en moyenne), $\nu = \frac{\omega_o}{2\pi} = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2} \frac{4 \times 16 \cdot 10^3}{(1600 + 4000)}} = 0,894$ Hz ; avec en plus 150 kg de bagages, la fréquence reste encore acceptable (= 0,87 Hz).

b) Le pendule simple

Un pendule est aussi un oscillateur simple à réaliser pratiquement : un objet M de masse m est lié à un point fixe A par un fil de longueur ℓ (figure 1-2). On écarte l'objet de sa position d'équilibre en conservant le fil bien tendu et on l'abandonne sans vitesse initiale. Le mouvement s'effectue dans le plan $(\vec{u}_x, \vec{A}\vec{M})$ où \vec{u}_x est vertical.

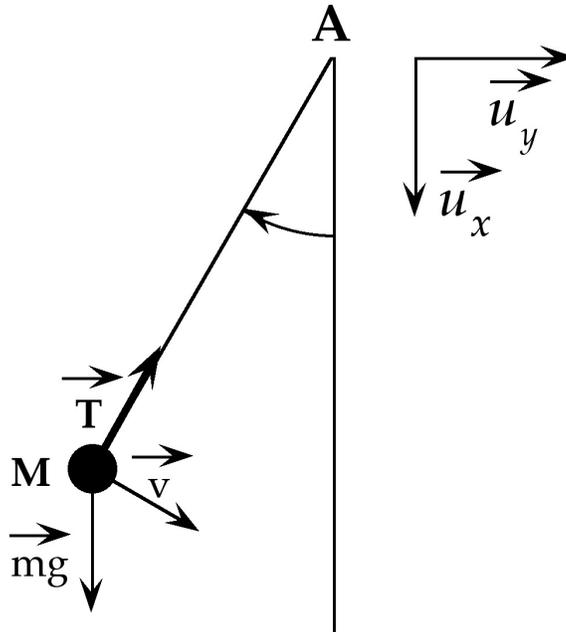


Figure 1-2

α) Mise en équation

La masse m est soumise à deux forces : son poids \vec{P} et la tension du fil \vec{T} ; l'une et l'autre sont dans le plan $(\vec{u}_x, A\vec{M})$. Les moments de ces forces par rapport au point A sont respectivement, avec $\vec{u}_z = \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y$:

$$A\vec{M} \wedge \vec{T} = \vec{0} \quad \text{et} \quad A\vec{M} \wedge \vec{P} = -\ell \sin \theta \vec{u}_z$$

L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit donc : $I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -m g \ell \sin \theta$, où I , le moment d'inertie du système par rapport à A, est égal à $m \ell^2$.

On a donc $\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta$ et si θ est suffisamment petit pour qu'on puisse le confondre avec $\sin \theta$: $\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \theta = 0$

En posant : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, l'équation du mouvement devient :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (1.4)$$

On obtient encore l'équation différentielle caractéristique d'un *oscillateur harmonique conservatif*.

La *fréquence propre du pendule simple* est donnée par : $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

β) Paramètres négligés

On néglige la masse du fil et les frottements : on se limite ici au cas où l'écart angulaire θ à la position d'équilibre est petit, ce qui signifie que l'écart relatif $\frac{\theta - \sin \theta}{\sin \theta}$ est petit par rapport à 1.

À titre d'exemple, cet écart vaut 0,005 pour un angle θ de 10° et 0,02 pour 20° . On étudiera par la suite le cas des grandes oscillations (voir chapitre 2-2.2).

γ) Exemple : le pendule qui bat la seconde

La période $T = \frac{1}{\nu_0} \approx 2$ s correspond à celle d'un pendule qui « bat la seconde ». Si la longueur du pendule est égale à 1 mètre, la pulsation et la fréquence sont respectivement :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{9,81}{1}} = 3,1322 \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{3,1322}{2\pi} = 0,4985 \approx 0,5 \text{ s}^{-1}$$

c) Le pendule de torsion

Il est constitué d'une barre cylindrique homogène de moment d'inertie I , fixée en son centre de gravité à un fil de constante de torsion Γ dont l'autre extrémité est fixée au plafond par exemple.

α) Mise en équation

Si θ est l'angle par rapport à la position d'équilibre, on a : $I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\Gamma\theta$

L'équation du mouvement est alors : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$, avec $\omega_0^2 = \frac{\Gamma}{I}$

Le moment d'inertie d'une tige de masse m et de longueur ℓ autour d'un axe central perpendiculaire à sa longueur est égal à : $I = \frac{m\ell^2}{12}$

La fréquence propre du pendule de torsion est donnée par : $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Gamma}{I}}$

β) Paramètres négligés

A part les habituels frottements, il n'y a aucun paramètre négligé dans ce calcul car le couple de rappel d'un fil de torsion est strictement proportionnel à l'angle de torsion, aussi longtemps qu'on reste dans la limite élastique, ce qui est d'autant plus facile à obtenir que le fil est long par rapport à son diamètre.

γ) Exemple

Une tige mince longue de 10 cm et ayant une masse de 0,1 kg est suspendue par un fil métallique qui passe par son centre. On tord le fil et la tige entre en oscillation avec une période de 2,0 s. La constante de torsion du fil est donc égale à :

$$\Gamma = \frac{(0,5)^2 \times 0,1 \times (0,1)^2}{12} (2\pi)^2 = 8,23 \cdot 10^{-4} \text{ Nrd}^{-1}$$

d) Le circuit électrique oscillant

Le circuit est formé d'un condensateur de capacité C et d'une bobine de self inductance L . On peut observer des oscillations aux bornes du condensateur, en chargeant celui-ci « interrupteur ouvert » (figure 1-3-a), puis en fermant l'interrupteur (figure 1-3-b) ; on observe les oscillations à l'aide d'un voltmètre ; notons qu'il faut alors utiliser un condensateur de capacité élevée et une self inductance importante ayant une très faible résistance ohmique pour parvenir à observer des oscillations.

α) Mise en équation

Sur le schéma a, les charges indiquées sur les plaques du condensateur sont celles qui existent avant la fermeture de l'interrupteur. La différence de potentiel aux bornes du condensateur lorsque la plaque de droite porte la charge q vaut $V_N - V_M = \frac{q}{C}$. Dès que l'on ferme l'interrupteur, le courant i varie et il apparaît aux bornes de la bobine une différence de potentiel $V_M - V_N = L \frac{di}{dt}$ où $i = +\frac{dq}{dt}$.

On a $L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$ ou $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$, ou encore, en posant $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \quad (1.5)$$

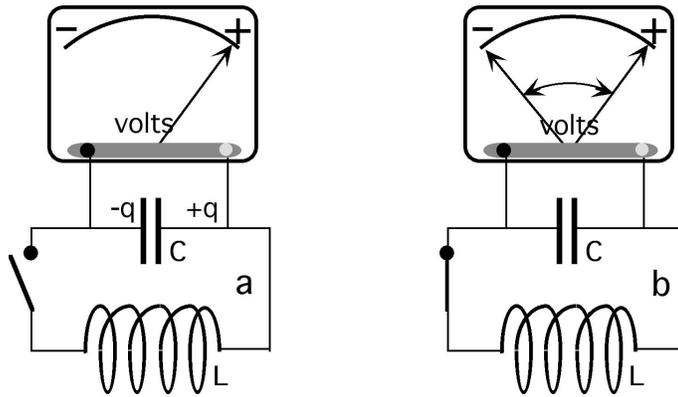


Figure 1-3

C'est l'équation différentielle caractéristique de l'oscillateur harmonique conservatif.

La fréquence propre du circuit LC est donnée par : $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$

β) Paramètres négligés dans l'analyse du système

On néglige l'énergie émise par rayonnement, les pertes ohmiques des différents conducteurs : des fils et de la self, les pertes diélectriques dans le condensateur.

γ) Exemple : quel circuit LC ?

- pour écouter sa fréquence favorite, par exemple TSF, (fréquence = 89,9 MHz), il faut un circuit LC tel que : $LC = \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{10^{-12}}{4\pi^2(89,9)^2} = 3,1310^{-18}$

Si $L = 10^{-4} H$, on trouve $C = 3,13 \times 10^{-14} F = 3,1310^{-2} pF$.

- pour observer les oscillations sur un voltmètre, il faut que la période soit de l'ordre de la seconde : $LC = \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{4\pi^2(1)^2} = 0,025$; $L = 1H$ et $C = 25000 \mu F$.

e) L'oscillateur d'Helmholtz

Une bouteille vide de section carrée constitue un bon résonateur ; si on souffle dans cette bouteille perpendiculairement au goulot, on obtient un son qui dépend des dimensions de la bouteille. Soit une bouteille pleine d'air, de volume V , dont le goulot de hauteur ℓ a une section s (figure 1-4).

α) Mise en équation

Quand on souffle dans la bouteille, la masse d'air $\rho s \ell$ comprise dans le goulot constitue un « piston » qui est déplacé de δx : il en résulte une force de pression δp qui comprime l'air de la bouteille, ce qui crée une force de rappel.

Un gaz parfait subissant une compression adiabatique, c'est-à-dire sans échange de chaleur avec l'extérieur, obéit à l'équation $pV^\gamma = \text{Cte}$ (avec $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$), ce qui entraîne : $\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}$. On peut écrire : $\delta p = \frac{dp}{dV} \delta V$ et $\delta p = -\gamma \frac{p}{V} \delta V = -\gamma \frac{p}{V} s \delta x$

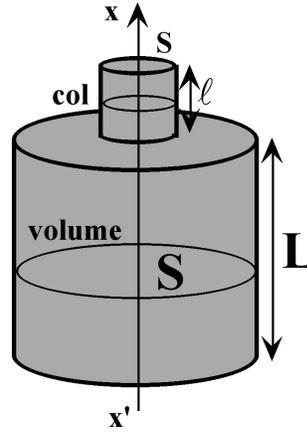


Figure 1-4

L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$\rho s l \frac{d^2 \delta x}{dt^2} = -\gamma \frac{p}{V} s^2 \delta x \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 \delta x}{dt^2} + \gamma \frac{ps}{\rho l V} \delta x = 0$$

En posant : $\omega_0^2 = \frac{ps\gamma}{V\rho l}$, on obtient encore l'équation différentielle caractéristique d'un oscillateur harmonique conservatif. La fréquence d'Helmholtz est donnée par :

$$\nu = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{s}{Vl}}, \quad c \text{ étant la vitesse du son : } c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

β) Paramètres négligés et hypothèses

On admet que la compression de l'air de la bouteille se fait de façon adiabatique. On néglige les pertes d'énergie vers l'air extérieur qui, en fait, sont considérables et ne permettent pratiquement pas d'obtenir une oscillation libre audible.

On restreint la masse d'air du piston à celle de l'air contenu dans le goulot ; un calcul détaillé dû à Lord Kelvin a montré que la masse d'air est en fait légèrement plus grande que celle du goulot ; cette correction est d'autant plus importante que le goulot est large et court. L'expression donnée pour la pulsation ω_0 ne donne donc pas exactement la période obtenue expérimentalement à moins de remplacer la longueur l du goulot par une longueur effective $l_{eff} = l + l_0$ où la longueur supplémentaire est donnée par $l_0 = \frac{8d}{3\pi}$, d étant le diamètre de la section circulaire du col. En fait, on comprend que les couches d'air situées de part et d'autre du col doivent être entraînées dans le mouvement et donc que la longueur effective de la masse d'air est plus grande que la longueur géométrique du goulot.

γ) Exemple : fréquence obtenue dans une bouteille

Utilisons comme oscillateur une bouteille de section carrée de 6,12 cm de côté et de 20 cm de hauteur, dont le goulot a une longueur $\ell = 5,5$ cm et une section de rayon égale à 1 cm ; on a donc : $V = 750 \text{ cm}^3$, $r = 1 \text{ cm}$, $\ell = 5,5 \text{ cm}$.

On sait que $\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$ avec $R = 8,31431 \text{ J/K}$, où T est la température en Kelvin et M la masse molaire du gaz.

Pour l'air à 300 K, on a $M = 29 \times 10^{-3} \text{ kg}$ et $\gamma = 1,4$.

$$\omega_0^2 = \frac{\gamma p s}{V \rho \ell} = \gamma \frac{RT}{\rho} \frac{s}{\ell V} = 1,4 \frac{8,31431}{29 \cdot 10^{-3}} 300 \frac{\pi(1)^2 10^{-4}}{750 \cdot 10^{-6}} \frac{1}{5,5 \times 10^{-2}} = 0,917 \times 10^6$$

Nous avons : $\omega_0 = \sqrt{0,917 \times 10^6} = 0,957 \times 10^3$ et $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = 152 \text{ Hz}$. Si on mesure la fréquence à l'aide d'un fréquencesmètre, on trouve 147 Hz. La différence est due à l'approximation faite en prenant comme longueur du piston, la dimension du goulot de la bouteille.

f) Les oscillations d'un atome fictif

On peut donner une image simplifiée d'un atome d'hydrogène en imaginant un proton situé au centre d'une sphère de rayon a_0 (rayon de Bohr $5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$) remplie de façon uniforme par la charge d'un électron. Si l'on déplace légèrement le noyau d'une distance x , il ressent une force centripète d'origine électrostatique due à la charge négative q contenue dans la sphère de rayon x . Le calcul classique de cette force donne, en utilisant le théorème de Gauss : $F = eE = e \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$

La charge e occupe la sphère de rayon a_0 , de volume V_0 , donc la charge contenue dans la sphère de rayon x , de volume V_x est égale à : $q = e \frac{V_x}{V_0} = e \frac{x^3}{a_0^3}$

On trouve : $F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} x = Kx$. La force étant proportionnelle au déplacement, on

a un oscillateur dont la pulsation vaut : $\omega_0^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m a_0^3}$ où m est la masse de l'électron ; en effet compte tenu du rapport de la masse de l'électron à celle du proton, c'est l'électron qui se déplace et non le proton.

Avec : $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $a_0 = 5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$, on trouve une fréquence d'oscillation de $7,2 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ qui est comparable, en ordre de grandeur, à celle des raies ultra-violettes d'un atome d'hydrogène (la fréquence la plus élevée du spectre de l'hydrogène a une valeur de $3,88 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$).

Remarques

1) Les systèmes que nous venons de décrire par différents paramètres $\Psi(t)$ n'échangent aucune énergie avec l'extérieur.

Leur énergie reste constante et l'oscillation garde indéfiniment la même *amplitude* : ce sont des *systèmes isolés*. Une telle situation n'est pas physiquement réalisable, tout système dynamique présentant une déperdition d'énergie, même minime, au cours du temps. Néanmoins si les pertes d'énergie au cours d'une oscillation sont extrêmement faibles par

rapport à l'énergie totale du système, on peut considérer le système comme localement isolé.

2) Tous ces systèmes ont comme caractéristique commune que le terme de rappel (force ramenant le système vers la position d'équilibre) est proportionnel à l'élongation (écart $\Psi - \Psi_0$ par rapport à cette position d'équilibre) : ce sont des *oscillateurs harmoniques*.

Dans certains cas, cette proportionnalité est rigoureusement exacte, mais ce peut être le résultat d'une approximation, en particulier si le système oscille autour de la position d'équilibre (minimum du potentiel) avec de *petites élongations*.

En effet, soit un système pour lequel nous décrivons la « force » de rappel par un potentiel $U(P)$ tel que : $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$

A une dimension, cette situation se représente par exemple par un graphe de la forme donnée sur la figure 1-5.

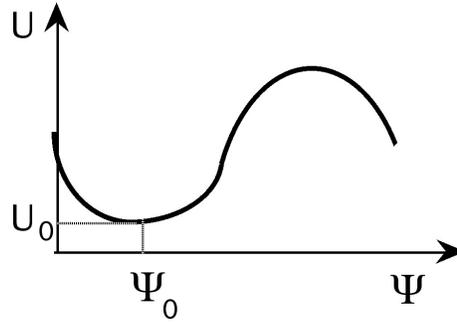


Figure 1-5

Le potentiel peut être développé en tout point régulier :

$$U = U_i + (\Psi - \Psi_i) \left[\frac{\partial U}{\partial \Psi} \right]_{\Psi_i} + \frac{1}{2} (\Psi - \Psi_i)^2 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \Psi^2} \right]_{\Psi_i}$$

La position d'équilibre Ψ_0 , caractérisé par : $\left[\frac{\partial U}{\partial \Psi} \right]_{\Psi_0} = 0$ correspond à un minimum U_0 du potentiel.

Le développement autour de Ψ_0 se réduit à :

$$U = U_0 + \frac{1}{2} (\Psi - \Psi_0)^2 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \Psi^2} \right]_{\Psi_0} \quad \text{avec} \quad \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \Psi^2} \right]_{\Psi_0} > 0$$

Pour de petits déplacements, on néglige les termes d'ordre supérieur à 2 et la force de rappel est proportionnelle à l'élongation ; en effet, elle se réduit à :

$$F = -\frac{\partial U}{\partial \Psi} = -(\Psi - \Psi_0) \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \Psi^2} \right]_{\Psi_0}$$