Sujet 1 Métropole ♦ 2009

Exercice 1. *Autres spécialités* (9 points)

Cet exercice se compose de trois parties qui peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.
On s'intéresse aux requêtes reçues par le serveur web d'une grande entreprise, provenant de clients dispersés sur le réseau Internet.
La réception de trop nombreuses requêtes est susceptible d'engendrer des problèmes de surcharge du serveur.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse au nombre de requêtes reçues par le serveur, au cours de certaines durées jugées critiques.
On désigne par τ un nombre réel strictement positif. On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de requêtes reçues par le serveur dans un intervalle de temps de durée τ (exprimée en secondes). La variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 500\tau$.

1. Dans cette question, on s'intéresse au cas où $\tau = 0{,}01$.

a) Déterminer la probabilité que le serveur reçoive au plus une requête au cours d'une durée τ de 0,01 s.

b) En expliquant votre démarche, déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que $p\,(X > n_0) < 0{,}05$.

2. Dans cette question, on s'intéresse au cas où $\tau = 0{,}2$.

On rappelle que la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 100$ peut être approchée par la loi normale de moyenne $\mu = 100$ et d'écart type $\sigma = 10$.

En utilisant cette approximation, calculer :

a) la probabilité $P(X > 120)$;

b) une valeur approchée du nombre réel positif a tel que :

$$P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = 0{,}99.$$

Partie B

Dans cette partie, on considère :

- d'une part, que la probabilité pour le serveur de connaître des dysfonctionnements importants au cours d'une journée donnée est $p = 0{,}01$;
- d'autre part, que des dysfonctionnements importants survenant au cours de journées distinctes constituent des évènements aléatoires indépendants.

1. On appelle Y la variable aléatoire correspondant au nombre de jours où le serveur connaît des dysfonctionnements importants au cours d'un mois de 30 jours.

a) On admet que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale.

Préciser les paramètres de cette loi.

b) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que le serveur connaisse au plus 2 jours de dysfonctionnements importants pendant un mois.

2. On appelle Z la variable aléatoire correspondant au nombre de jours où le serveur connaît des dysfonctionnements importants au cours d'une année de 365 jours.

a) Donner, sans justification, la loi de probabilité de la variable aléatoire Z.

b) Donner l'espérance mathématique et l'écart type de la variable aléatoire Z.

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à la durée séparant deux requêtes successives reçues par le serveur.

On appelle T la variable aléatoire qui prend pour valeurs les durées (exprimées en secondes) séparant l'arrivée de deux requêtes successives sur le serveur.

1. On désigne par t un nombre réel positif. La probabilité que T prenne une valeur inférieure ou égale à t est donnée par : $P(T \leq t) = \int_0^t 500e^{-500x}dx$.

a) Calculer $P(T \leq t)$ en fonction de t.

b) En déduire la valeur de t pour laquelle $P(T \leq t) = 0{,}95$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée au millième de seconde.

2.

a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :

$$I(t) = \int_0^t 500xe^{-500x}dx .$$

b) Déterminer la limite m de I(t) quand t tend vers $+\infty$.

Le nombre m est l'espérance mathématique de la variable aléatoire T.

Il représente la durée moyenne séparant la réception de deux requêtes successives.

Commentaire : Ce modèle, très simple, intéresse les concepteurs de systèmes d'information ou de télécommunication car il fournit des évaluations de certaines performances d'un système, en particulier au sens du « scénario du pire des cas ».

Exercice 1. *Spécialités CIRA et Systèmes électroniques* (9 points)

Le but de cet exercice est d'établir, avec un minimum de calculs, le développement en série de Fourier de fonctions périodiques rencontrées en électricité.

1. On considère un entier naturel n strictement positif. Montrer que :

$$\int_0^1 t\cos(n\pi t)dt = \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2}.$$

Pour la suite de l'exercice, on admet que :

$$\int_0^1 t\sin(n\pi t)dt = -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}.$$

2. On considère la fonction f définie sur IR, périodique de **période 2**, telle que :

$$\begin{cases} f(t) = t & \text{sur } [0\,;1[\\ f(t) = 0 & \text{sur } [1\,;2[\end{cases}.$$

a) En utilisant le document réponse, à rendre avec la copie, tracer la courbe C_f représentative de la fonction f sur l'intervalle [–4 ; 4].

b) On appelle S_f la série de Fourier associée à la fonction f.

On note $S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(n\pi t) + b_n\sin(n\pi t)]$.

Calculer a_0.

Donner les valeurs des coefficients a_n et b_n et en déduire que :

$$S_f(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right].$$

c) Calculer le carré de la valeur efficace de la fonction f, défini par :

$$\mu_{eff}^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 [f(t)]^2\,dt.$$

d) Recopier et compléter, avec les valeurs exactes, le tableau suivant :

n	1	2	3
a_n			
b_n			

e) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel A défini par :

$$A = \frac{a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\left(a_n^2 + b_n^2\right)}{\mu_{eff}^2}.$$

3. Soit g la fonction définie sur IR, périodique de **période 2**, dont la courbe C_g est tracée sur l'intervalle [–4 ; 4] dans le document réponse.

On admet que le développement en série de Fourier S_g associé à la fonction g, est défini par :

$$S_g(t) = S_f(-t).$$

Justifier que :

$$S_g(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right].$$

4. Soit h et k les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, périodiques **de période 2**, telles que :

$$h(t) = f(t) + g(t) \text{ et } k(t) = f(t) - g(t) \text{ pour tout nombre réel } t.$$

a) Sur le document réponse, à rendre avec la copie, tracer les courbes C_h et C_k représentatives des fonctions h et k sur l'intervalle [–4 ; 4].

b) On admet que les développements en série de Fourier S_h et S_k associés respectivement aux fonctions h et k sont définis par :

$$S_h(t) = S_f(t) + S_g(t) \text{ et } S_k(t) = S_f(t) - S_g(t).$$

Déterminer les coefficients de Fourier associés respectivement aux fonctions h et k.

Document réponse

figure 1. Représentation graphique C_f de la fonction f

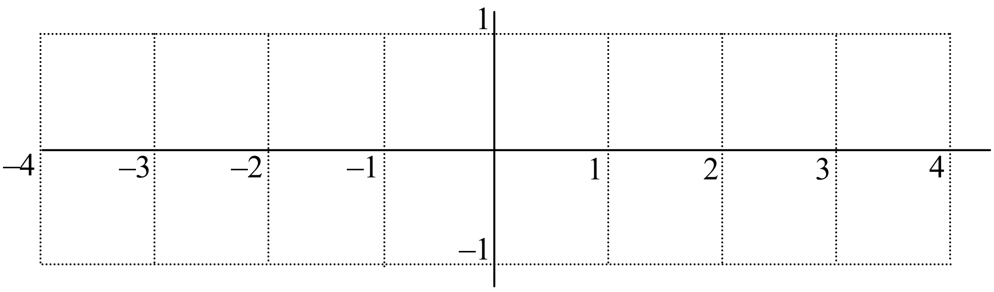


figure 2. Représentation graphique C_g de la fonction g

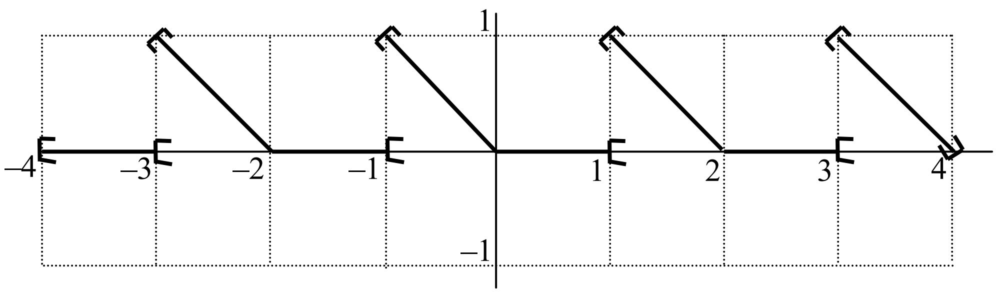


figure 3. Représentation graphique C_h de la fonction h

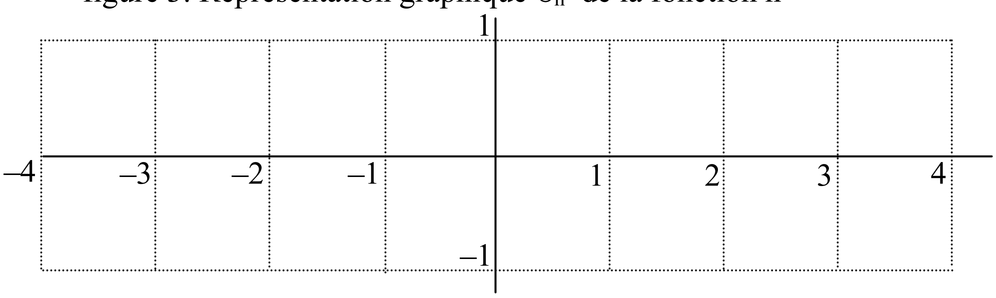
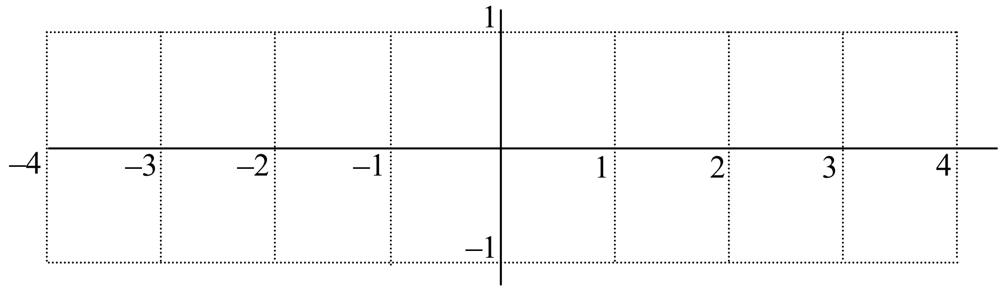


figure 4. Représentation graphique C_k de la fonction k



Exercice 2. (11 points)

Dans cet exercice, on étudie un système « entrée-sortie ».
La partie A permet de déterminer la réponse à l'échelon unité.
Les parties B et C permettent d'étudier les perturbations résultant d'une coupure de 0,1 seconde.

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ U(t) = 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}.$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur $]-\infty\,;0[$.

Partie A

On considère la fonction causale s_1 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_1(t) + \int_0^t s_1(u)\,du = U(t).$$

On note S_1 la transformée de Laplace de la fonction s_1.

1. Montrer que $S_1(p) = \dfrac{1}{p+1}$.

2. En déduire $s_1(t)$ pour tout nombre réel t.

La courbe représentative de la fonction s_1 est donnée par la **figure 1 du document réponse.**

Partie B

On considère la fonction causale s_2 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_2(t) + \int_0^t s_2(u)\,du = U(t) - U(t-1).$$

On note S_2 la transformée de Laplace de la fonction s_2.

1. Représenter graphiquement la fonction e_2 définie sur l'ensemble des nombres réels par : $e_2(t) = U(t) - U(t-1)$.

2. Déterminer $S_2(p)$.

3.
a) En déduire $s_2(t)$ pour tout nombre réel t.
b) Justifier que :

$$\begin{cases} s_2(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0 \\ s_2(t) = e^{-t} \quad \text{si} \quad 0 \leq t < 1 \\ s_2(t) = -e^{-t}(e-1) \quad \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}.$$

4. Etablir le sens de variation de la fonction s_2 sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$.
5. Calculer $s_2(1^+) - s_2(1^-)$.
6. On appelle C_2 la courbe représentative de la fonction s_2.
a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	1	1,1	1,5	2	2,5
$s_2(t)$					

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.
b) Compléter le tracé de la courbe C_2 sur la figure 2 du document réponse, à rendre avec la copie.

Partie C

On considère la fonction causale s_3 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_3(t) + \int_0^t s_3(u)du = U(t) - U(t-1) + U(t-1,1).$$

1. Soit la fonction e_3 définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e_3(t) = U(t) - U(t-1) + U(t-1,1).$$

a) Montrer que $e_3(t) = e_2(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $]-\infty ; 1,1[$.
b) Déterminer $e_3(t)$ pour $t \geq 1,1$.
c) Représenter graphiquement la fonction e_3.
Pour la suite, on admet que :

$$\begin{cases} s_3(t) = s_2(t) \quad \text{si} \quad t < 1,1 \\ s_3(t) = e^{-t}(1 - e + e^{1,1}) \quad \text{si} \quad t \geq 1,1 \end{cases}.$$

2. Etablir le sens de variation de la fonction s_3 sur l'intervalle $]1,1 ; +\infty[$.
3. Calculer $s_3(1,1^+) - s_3(1,1^-)$.
4. On appelle C_3 la courbe représentative de la fonction s_3.
a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	1,1	1,5	2	2,5
$s_3(t)$				

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.
b) Compléter le tracé de la courbe C_3 sur la figure 3 du document réponse, à rendre avec la copie.

Document réponse de l'exercice 2

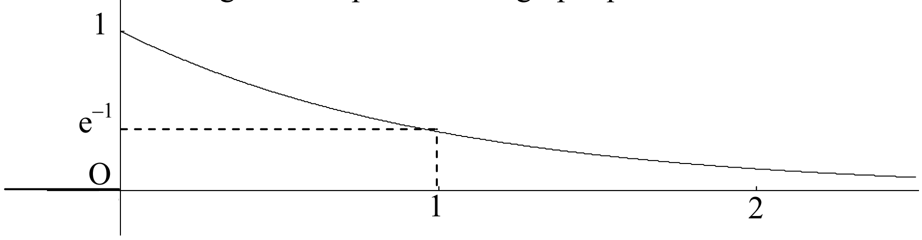


figure 1. Représentation graphique de la fonction s_1

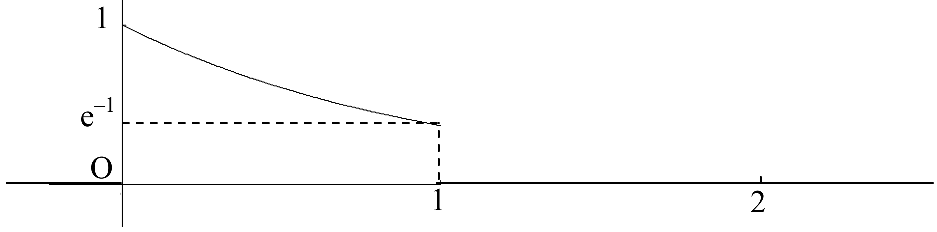


figure 2. Représentation graphique de la fonction s_2

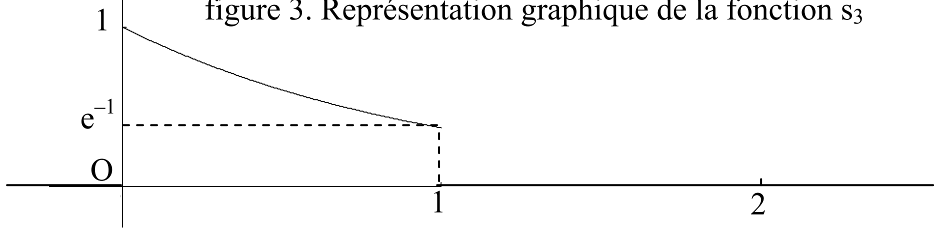


figure 3. Représentation graphique de la fonction s_3

Correction

Exercice 1.

Partie A

1. a) Calcul de la probabilité que le serveur reçoive au plus une requête au cours d'une durée τ de 0,01 s.

X suit la loi de Poisson de paramètre λ si $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Ici $\lambda = 500 \times 0{,}01 = 5$.
Le serveur reçoit au plus une requête au cours d'une durée de 0,01 seconde si $X \leq 1$.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-5}\frac{5^0}{0!} + e^{-5}\frac{5^1}{1!} = 6e^{-5}.$$

$$\boxed{P(X \leq 1) = 6e^{-5}}$$

b) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que $p(X > n_0) < 0{,}05$.

D'après le cours, $p(X > n_0) = 1 - p(X \leq n_0) = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n_0} e^{-5}\frac{5^k}{k!}$.

$$p(X > n_0) < 0{,}05 \Leftrightarrow 1 - \sum_{k=0}^{k=n_0} e^{-5}\frac{5^k}{k!} < 0{,}05 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{k=n_0} e^{-5}\frac{5^k}{k!} > 0{,}95.$$

On en déduit, en multipliant les deux membres par e^5 : $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n_0}\frac{5^k}{k!} > 0{,}95e^5$.

$0{,}95e^5 \approx 140{,}9925$.

Il faut trouver le plus petit entier naturel n_0 tel que la somme indiquée soit supérieure à **140,9925**.

Pour $n_0 = 8$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=8}\frac{5^k}{k!} = 1 + \frac{5}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!} + \frac{5^6}{6!} + \frac{5^7}{7!} + \frac{5^8}{8!}$.

Cette somme donne 138,3072 valeur inférieure à celle donnée.

Pour $n_0 = 9$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=9}\frac{5^k}{k!} = 1 + \frac{5}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!} + \frac{5^6}{6!} + \frac{5^7}{7!} + \frac{5^8}{8!} + \frac{5^9}{9!}$.

Cette somme est égale à 143,6895 somme qui cette fois est effectivement supérieure à la valeur donnée.

$$\mathbf{n_0 = 9.}$$

2. a) Calcul de $P(X > 120)$.

$\tau = 0{,}2$ alors $\lambda = 500 \times 0{,}2 = 100$. La loi de Poisson est approchée par la loi normale de moyenne $\mu = 100$ et d'écart type $\sigma = 10$.