

# Sommaire

<b>1</b>	<b>EQUATIONS DIFFERENTIELLES</b>	<b>1</b>
1.1	COURS . . . . .	1
1.1.1	Introduction . . . . .	1
1.1.1.1	Résumé . . . . .	1
1.1.1.2	Positionnement mathématique . . . . .	2
1.1.2	Equations linéaires scalaires d'ordre 1 . . . . .	2
1.1.2.1	Définitions . . . . .	3
1.1.2.2	Formule de représentation . . . . .	4
1.1.2.3	Applications théoriques . . . . .	5
1.1.2.4	Techniques de calcul . . . . .	6
1.1.2.5	Méthode d'Euler . . . . .	8
1.1.3	Equations linéaires vectorielles d'ordre 1 . . . . .	10
1.1.3.1	Exemples . . . . .	10
1.1.3.2	Définitions . . . . .	13
1.1.3.3	Le théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	14
1.1.3.4	Systèmes différentiels homogènes à coefficients constants diagonalisables . . . . .	16
1.1.4	Equations linéaires scalaires d'ordre 2 . . . . .	20
1.1.4.1	Définitions . . . . .	21
1.1.4.2	Théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	21
1.1.4.3	Résolution dans le cas de coefficients constants . . . . .	23
1.2	COMPLEMENT — METHODE DE VARIATION DES CONSTANTES . . . . .	25
1.2.1	Cas des systèmes linéaires d'ordre 1 . . . . .	25
1.2.2	Application : équations différentielles scalaires d'ordre 2 . . . . .	28
1.3	EXERCICES . . . . .	30
1.3.1	Révisions : réduction des matrices . . . . .	30
1.3.2	Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 . . . . .	34
1.3.2.1	Apprentissage du cours . . . . .	34
1.3.2.2	Pour aller plus loin . . . . .	38
1.3.3	Systèmes différentiels . . . . .	44
1.3.3.1	Apprentissage du cours . . . . .	44
1.3.3.2	Pour aller plus loin . . . . .	55

1.3.4	Systèmes d'ordre supérieur ou égal à 2 . . . . .	60
1.3.4.1	Apprentissage du cours . . . . .	60
1.3.4.2	Pour aller plus loin . . . . .	63
1.3.5	Equations scalaires d'ordre 2 . . . . .	69
1.3.5.1	Apprentissage du cours . . . . .	69
1.3.5.2	Pour aller plus loin . . . . .	75
1.4	PROBLEMES . . . . .	77
<b>2</b>	<b>SERIES NUMERIQUES</b>	<b>81</b>
2.1	COURS . . . . .	81
2.1.1	Introduction . . . . .	81
2.1.1.1	Résumé . . . . .	81
2.1.1.2	Positionnement mathématique . . . . .	81
2.1.2	Prérequis . . . . .	82
2.1.2.1	Convergence d'une suite de nombres complexes . . . . .	82
2.1.2.2	Egalité et inégalité de Taylor-Lagrange . . . . .	83
2.1.3	Convergence d'une série . . . . .	84
2.1.3.1	Définitions . . . . .	84
2.1.3.2	Exemples de référence . . . . .	85
2.1.3.3	Propriétés des séries convergentes . . . . .	88
2.1.4	Séries à termes réels positifs . . . . .	90
2.1.4.1	Monotonie de la suite des sommes partielles . . . . .	90
2.1.4.2	Critères de comparaison des séries à termes positifs . . . . .	91
2.1.4.3	Séries de Riemann . . . . .	94
2.1.4.4	Règles de Cauchy et de D'Alembert . . . . .	95
2.1.4.5	Comparaison série-intégrale . . . . .	97
2.1.5	Séries à termes réels ou complexes . . . . .	98
2.1.5.1	Suites de Cauchy . . . . .	98
2.1.5.2	Absolute convergence . . . . .	100
2.1.5.3	Semi-convergence . . . . .	101
2.1.6	Opérations sur les termes d'une série . . . . .	103
2.1.6.1	Associativité restreinte : sommation par paquets . . . . .	103
2.1.6.2	Permutation des termes : commutativité . . . . .	105
2.1.6.3	Produit de convolution de deux séries . . . . .	107
2.1.6.4	Application : exponentielle complexe . . . . .	108
2.1.7	Tableau récapitulatif sur les séries numériques de référence . . . . .	110
2.2	COMPLEMENT — THEOREME D'ABEL . . . . .	111
2.2.1	Transformation d'Abel . . . . .	111
2.2.2	Critère d'Abel . . . . .	112
2.3	EXERCICES . . . . .	114
2.3.1	Révisions sur les suites . . . . .	114
2.3.1.1	Apprentissage du cours . . . . .	114
2.3.1.2	Pour aller plus loin . . . . .	115
2.3.2	Séries de référence . . . . .	115
2.3.2.1	Apprentissage du cours . . . . .	115
2.3.2.2	Pour aller plus loin . . . . .	120

2.3.3	Premières propriétés des séries . . . . .	121
2.3.4	Séries à termes positifs : théorèmes de comparaison . . . . .	122
2.3.4.1	Apprentissage du cours . . . . .	122
2.3.4.2	Pour aller plus loin . . . . .	125
2.3.5	Séries à termes positifs : Riemann, géométriques, intégrales . . . . .	128
2.3.5.1	Apprentissage du cours . . . . .	128
2.3.5.2	Pour aller plus loin . . . . .	134
2.3.6	Des séries aux suites . . . . .	136
2.3.7	Semi-convergence . . . . .	137
2.3.7.1	Apprentissage du cours . . . . .	137
2.3.7.2	Pour aller plus loin . . . . .	138
2.3.8	Opérations sur les termes d'une série . . . . .	139
2.3.9	Synthèse . . . . .	140
2.3.10	Avec Maple . . . . .	144
2.3.11	Autour du théorème d'Abel . . . . .	145
2.4	PROBLEMES . . . . .	146
2.4.1	Calcul de $\pi$ . . . . .	146
2.4.2	Séries doubles . . . . .	148
2.5	Q.C.M. . . . .	149
<b>3</b>	<b>SUITES ET SERIES D'APPLICATIONS</b> . . . . .	<b>153</b>
3.1	COURS . . . . .	153
3.1.1	Introduction . . . . .	153
3.1.1.1	Résumé . . . . .	153
3.1.1.2	Positionnement mathématique . . . . .	154
3.1.2	Suites d'applications . . . . .	154
3.1.2.1	Définition de la convergence simple . . . . .	154
3.1.2.2	Exemples . . . . .	155
3.1.2.3	Définition de la convergence uniforme . . . . .	157
3.1.2.4	Exemples . . . . .	159
3.1.2.5	Propriétés algébriques . . . . .	160
3.1.2.6	Propriétés de la limite uniforme d'une suite d'applications . . . . .	162
3.1.3	Séries d'applications . . . . .	167
3.1.3.1	Définition de la convergence simple . . . . .	167
3.1.3.2	Définition de la convergence uniforme . . . . .	170
3.1.3.3	Convergence uniforme des séries alternées . . . . .	171
3.1.3.4	Convergence normale d'une série d'applications . . . . .	172
3.1.3.5	Propriétés de la somme d'une série d'applications . . . . .	174
3.1.3.6	Critère de Cauchy . . . . .	177
3.2	COMPLEMENT — THEOREME D'ABEL UNIFORME . . . . .	180
3.3	EXERCICES . . . . .	182
3.3.1	Suites de fonctions et convergence simple . . . . .	182
3.3.1.1	Apprentissage du cours . . . . .	182
3.3.1.2	Pour aller plus loin . . . . .	186
3.3.2	Suites de fonctions et convergence uniforme . . . . .	188

3.3.2.1	Apprentissage du cours . . . . .	188
3.3.2.2	Pour aller plus loin . . . . .	192
3.3.2.3	Approfondissement . . . . .	196
3.3.3	Séries de fonctions . . . . .	198
3.3.3.1	Apprentissage du cours . . . . .	198
3.3.3.2	Pour aller plus loin . . . . .	201
3.4	PROBLEMES . . . . .	202
3.4.1	Fonction zêta de Riemann . . . . .	202
3.4.2	Théorème de Weierstrass . . . . .	205
3.5	Q.C.M. . . . .	209
<b>4</b>	<b>SERIES ENTIERES</b> . . . . .	<b>213</b>
4.1	COURS . . . . .	213
4.1.1	Introduction . . . . .	213
4.1.1.1	Résumé . . . . .	213
4.1.1.2	Positionnement mathématique . . . . .	213
4.1.2	Définition d'une série entière . . . . .	214
4.1.3	Domaine de convergence simple . . . . .	214
4.1.3.1	Détermination pratique du domaine de convergence simple . . . . .	215
4.1.3.2	Définition générale du rayon de convergence . . . . .	215
4.1.4	Opérations sur les séries entières . . . . .	218
4.1.4.1	Structure d'algèbre . . . . .	218
4.1.4.2	Substitution d'un monôme . . . . .	221
4.1.5	Propriétés de la somme d'une série entière . . . . .	222
4.1.5.1	Convergence uniforme et continuité . . . . .	222
4.1.5.2	Dérivation et intégration formelles . . . . .	223
4.1.5.3	Primitives de la somme d'une série entière . . . . .	224
4.1.5.4	Dérivées de la somme d'une série entière . . . . .	225
4.1.5.5	Expression des coefficients d'une série entière en fonction de sa somme . . . . .	226
4.1.6	Développement en série entière . . . . .	227
4.1.6.1	Conditions de développabilité en série entière . . . . .	227
4.1.6.2	Développements en série entière de référence . . . . .	230
4.1.6.3	Avec Maple . . . . .	235
4.1.7	Retour sur l'exponentielle complexe . . . . .	236
4.2	COMPLEMENT — THEOREMES D'ABEL-DIRICHLET ET TAUBER . . . . .	237
4.2.0.1	Théorème d'Abel-Dirichlet . . . . .	237
4.2.0.2	Théorème de Tauber . . . . .	239
4.3	EXERCICES . . . . .	242
4.3.1	Convergence simple et rayon de convergence . . . . .	242
4.3.1.1	Apprentissage du cours . . . . .	242
4.3.1.2	Pour aller plus loin . . . . .	243
4.3.1.3	Approfondissement . . . . .	244
4.3.2	Opérations sur les séries entières . . . . .	245
4.3.2.1	Apprentissage du cours . . . . .	245

4.3.2.2	Pour aller plus loin . . . . .	246
4.3.3	Convergence uniforme et propriétés de la somme . . . . .	247
4.3.3.1	Apprentissage du cours . . . . .	247
4.3.3.2	Pour aller plus loin . . . . .	249
4.3.4	Développement en série entière . . . . .	251
4.3.4.1	Apprentissage du cours . . . . .	251
4.3.4.2	Pour aller plus loin . . . . .	256
4.3.4.3	Pour aller beaucoup plus loin . . . . .	260
4.3.5	Exponentielle complexe . . . . .	263
4.3.5.1	Apprentissage du cours . . . . .	263
4.3.5.2	Pour aller plus loin . . . . .	263
4.3.5.3	Approfondissement . . . . .	264
4.4	PROBLEMES . . . . .	266
<b>5</b>	<b>ESPACES VECTORIELS NORMES</b>	<b>269</b>
5.1	COURS 1 <sup>re</sup> PARTIE — NORMES, COMPLETEUDE . . . . .	269
5.1.1	Introduction . . . . .	269
5.1.1.1	Résumé . . . . .	269
5.1.1.2	Positionnement mathématique . . . . .	269
5.1.2	Normes et distances sur un espace vectoriel . . . . .	271
5.1.2.1	Espace vectoriel normé . . . . .	271
5.1.2.2	Distance associée à une norme . . . . .	274
5.1.3	Suites et séries convergentes dans un espace vectoriel normé . . . . .	275
5.1.3.1	Notations . . . . .	275
5.1.3.2	Définitions . . . . .	275
5.1.3.3	Propriétés . . . . .	278
5.1.4	Complétude d'un espace vectoriel normé . . . . .	279
5.1.5	Théorème du point fixe . . . . .	282
5.1.5.1	Définitions . . . . .	282
5.1.5.2	Théorème . . . . .	283
5.1.5.3	Majoration de l'erreur . . . . .	284
5.1.5.4	Contraction sur une partie fermée stable de $E$ . . . . .	285
5.1.6	Normes équivalentes . . . . .	287
5.2	COURS 2 <sup>e</sup> PARTIE — CONTINUITÉ, NORMES SUBORDONNÉES . . . . .	290
5.2.1	Introduction . . . . .	290
5.2.2	Continuité . . . . .	291
5.2.2.1	Définitions . . . . .	291
5.2.2.2	Exemples de référence . . . . .	294
5.2.2.3	Opérations et continuité . . . . .	295
5.2.2.4	Sous-ensembles fermés et continuité . . . . .	298
5.2.3	Normes induites . . . . .	301
5.2.3.1	Norme induite d'une application linéaire . . . . .	301
5.2.3.2	Norme induite d'une matrice . . . . .	303
5.3	COMPLEMENT 1 — COMPACTITE . . . . .	306
5.3.1	Introduction . . . . .	306
5.3.2	Définition et propriétés de la compacité . . . . .	306

5.3.3	Compacts de $(\mathbb{R}^n, \ \cdot\ _\infty)$ . . . . .	308
5.3.4	Equivalence des normes en dimension finie . . . . .	310
5.4	COMPLEMENT 2 — THEOREME DE CAUCHY-LIPSCHITZ . . . . .	312
5.4.1	Complétude d'un espace fonctionnel . . . . .	312
5.4.2	Démonstration du théorème 71 dans le cas d'un segment . . . . .	313
5.4.2.1	Equation intégrale . . . . .	314
5.4.2.2	Itérations de Picard . . . . .	314
5.4.2.3	Conclusion . . . . .	315
5.4.3	Démonstration du théorème 71 dans le cas d'un intervalle quelconque . . . . .	316
5.4.3.1	Existence . . . . .	316
5.4.3.2	Unicité . . . . .	316
5.5	EXERCICES . . . . .	317
5.5.1	Espaces vectoriels normés et suites convergentes . . . . .	317
5.5.1.1	Apprentissage du cours . . . . .	317
5.5.1.2	Pour aller plus loin . . . . .	321
5.5.2	Théorème du point fixe . . . . .	325
5.5.2.1	Apprentissage du cours . . . . .	325
5.5.2.2	Pour aller plus loin . . . . .	330
5.5.3	Equivalence de normes . . . . .	334
5.5.3.1	Apprentissage du cours . . . . .	334
5.5.3.2	Pour aller plus loin . . . . .	335
5.5.4	Continuité . . . . .	337
5.5.4.1	Apprentissage du cours . . . . .	337
5.5.4.2	Pour aller plus loin . . . . .	340
5.5.4.3	Pour aller beaucoup plus loin . . . . .	341
5.5.5	Fermés, fermés bornés . . . . .	342
5.5.5.1	Apprentissage du cours . . . . .	342
5.5.5.2	Pour en savoir plus . . . . .	343
5.5.6	Normes subordonnées . . . . .	345
5.5.6.1	Apprentissage du cours . . . . .	345
5.5.6.2	Pour aller plus loin . . . . .	348
5.6	PROBLEMES . . . . .	354
<b>6</b>	<b>FORMES BILINEAIRES SYMETRIQUES</b> . . . . .	<b>367</b>
6.1	COURS . . . . .	367
6.1.1	Introduction . . . . .	367
6.1.1.1	Résumé . . . . .	367
6.1.1.2	Positionnement mathématique . . . . .	367
6.1.2	Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques . . . . .	368
6.1.2.1	Formes bilinéaires symétriques . . . . .	368
6.1.2.2	Forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique . . . . .	369
6.1.2.3	Ecriture polynomiale et écriture matricielle d'une forme bilinéaire symétrique en dimension finie . . . . .	371

6.1.2.4	Ecriture polynomiale et matrice d'une forme quadratique en dimension finie . . . . .	374
6.1.2.5	Formes quadratiques positives, définies positives . . . . .	376
6.1.2.6	Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski . . . . .	377
6.1.3	Espaces préhilbertiens . . . . .	379
6.1.3.1	Produits scalaires . . . . .	379
6.1.3.2	Orthogonalité et théorème de Pythagore . . . . .	382
6.1.3.3	Projection sur une droite vectorielle . . . . .	386
6.1.3.4	Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt . . . . .	389
6.1.3.5	Projection sur un sous-espace de dimension finie . . . . .	391
6.1.3.6	Distance à un sous-espace de dimension finie . . . . .	392
6.1.4	Espaces euclidiens . . . . .	394
6.1.4.1	Bases orthonormées . . . . .	394
6.1.4.2	Matrices orthogonales . . . . .	396
6.1.4.3	Réduction d'un endomorphisme symétrique . . . . .	397
6.1.4.4	Application de la réduction : classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ par leur signature . . . . .	405
6.2	COMPLEMENT — ALGORITHME DU GRADIENT CONJUGUE . . . . .	408
6.2.1	Motivation et principe . . . . .	408
6.2.2	Fonctionnelle $\varphi$ . . . . .	408
6.2.3	Algorithme du gradient conjugué . . . . .	409
6.2.4	Convergence de l'algorithme . . . . .	411
6.3	CLASSIFICATION DES CONIQUES ET DES QUADRIQUES . . . . .	414
6.3.1	Positionnement mathématique . . . . .	414
6.3.2	Coniques . . . . .	414
6.3.3	Quadriques . . . . .	419
6.4	EXERCICES . . . . .	426
6.4.1	Formes bilinéaires, formes quadratiques . . . . .	426
6.4.1.1	Apprentissage du cours . . . . .	426
6.4.1.2	Pour aller plus loin . . . . .	428
6.4.2	Produits scalaires . . . . .	430
6.4.2.1	Apprentissage du cours . . . . .	430
6.4.2.2	Pour aller plus loin . . . . .	441
6.4.3	Classification des formes quadratiques . . . . .	449
6.4.3.1	Apprentissage du cours . . . . .	449
6.4.3.2	Pour aller plus loin . . . . .	451
6.4.4	Applications géométriques . . . . .	456
6.4.4.1	Apprentissage du cours . . . . .	456
6.4.4.2	Pour aller plus loin . . . . .	457
6.5	PROBLEMES . . . . .	459
<b>7</b>	<b>SERIES DE FOURIER</b> . . . . .	<b>467</b>
7.1	COURS . . . . .	467
7.1.1	Introduction . . . . .	467
7.1.1.1	Résumé . . . . .	467
7.1.1.2	Positionnement mathématique . . . . .	468

7.1.2	Espaces $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . . . . .	468
7.1.2.1	Applications continues par morceaux . . . . .	468
7.1.2.2	Orthogonalité dans l'espace $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . . . . .	469
7.1.2.3	Applications de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux . . . . .	470
7.1.2.4	Polynômes trigonométriques . . . . .	471
7.1.2.5	Normes sur $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , semi-normes sur $\mathcal{CM}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . . . . .	474
7.1.2.6	Suites et séries indexées par $\mathbb{Z}$ . . . . .	475
7.1.3	Séries de Fourier et séries trigonométriques . . . . .	476
7.1.3.1	Coefficients de Fourier . . . . .	476
7.1.3.2	Inégalité de Bessel . . . . .	479
7.1.3.3	Propriétés des coefficients de Fourier . . . . .	481
7.1.3.4	Séries trigonométriques . . . . .	484
7.1.4	Théorèmes de convergence . . . . .	486
7.1.4.1	Théorème de Parseval . . . . .	486
7.1.4.2	Théorème de Dirichlet . . . . .	488
7.1.4.3	Théorème de convergence normale . . . . .	490
7.2	COMPLEMENT 1 — APPROXIMATION DE FONCTIONS . . . . .	491
7.2.1	Théorème de Dirichlet . . . . .	491
7.2.1.1	Applications en escalier . . . . .	491
7.2.1.2	Théorème de Dirichlet . . . . .	494
7.2.2	Théorème de Féjer et théorème de Weierstrass trigonométrique . . . . .	496
7.2.3	Théorème de Parseval . . . . .	500
7.3	COMPLEMENT 2 — EQUATION DE LA CHALEUR . . . . .	501
7.3.1	Position du problème . . . . .	501
7.3.2	Mise en équation . . . . .	501
7.3.3	Résolution de l'équation de la chaleur . . . . .	502
7.3.4	Autre méthode de résolution . . . . .	504
7.4	EXERCICES . . . . .	507
7.4.1	Coefficients de Fourier . . . . .	507
7.4.1.1	Apprentissage du cours . . . . .	507
7.4.2	Séries trigonométriques . . . . .	508
7.4.2.1	Apprentissage du cours . . . . .	508
7.4.2.2	Pour aller plus loin . . . . .	509
7.4.3	Développements en série de Fourier . . . . .	509
7.4.3.1	Apprentissage du cours . . . . .	509
7.4.3.2	Pour aller plus loin . . . . .	513
7.4.3.3	Approfondissement . . . . .	518
7.5	PROBLEMES . . . . .	524
<b>8</b>	<b>CALCUL DIFFERENTIEL</b> . . . . .	<b>537</b>
8.1	COURS . . . . .	537
8.1.1	Introduction . . . . .	537
8.1.1.1	Résumé . . . . .	537
8.1.1.2	Positionnement mathématique . . . . .	537
8.1.2	Applications différentiables . . . . .	537
8.1.2.1	Ouverts . . . . .	537



8.1.2.2	Applications différentiables . . . . .	539
8.1.2.3	Exemples de référence . . . . .	543
8.1.2.4	Opérations sur les applications et différentiabilité . . . . .	545
8.1.2.5	Matrice jacobienne . . . . .	548
8.1.2.6	Dérivée selon un vecteur . . . . .	549
8.1.2.7	Dérivées partielles en $a$ relativement à une base $\mathcal{E}$ . . . . .	550
8.1.2.8	Matrice jacobienne et dérivées partielles . . . . .	552
8.1.2.9	Dérivation en chaîne . . . . .	554
8.1.3	Théorème des accroissements finis . . . . .	555
8.1.3.1	Parties convexes . . . . .	556
8.1.3.2	Cas où $f$ est à valeurs scalaires . . . . .	556
8.1.3.3	Cas où $f$ est à valeurs vectorielles . . . . .	557
8.1.4	Dérivées d'ordre supérieur et applications de classe $\mathcal{C}^k$ . . . . .	559
8.1.4.1	Différentielle seconde . . . . .	559
8.1.4.2	Applications de classes $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ . . . . .	561
8.1.4.3	Applications de classe $\mathcal{C}^k$ et dérivées partielles . . . . .	564
8.1.4.4	Dérivées partielles d'ordre 2 et théorème de Schwarz . . . . .	567
8.1.5	Théorème d'inversion globale . . . . .	572
8.1.5.1	Difféomorphismes et théorème d'inversion globale . . . . .	572
8.1.5.2	Changements de variable classiques . . . . .	573
8.1.6	Opérateurs différentiels . . . . .	576
8.1.6.1	Définitions . . . . .	576
8.1.6.2	Propriétés . . . . .	578
8.1.7	Formules de Taylor . . . . .	579
8.1.7.1	Polynôme de Taylor . . . . .	579
8.1.7.2	Formule de Taylor-Lagrange . . . . .	580
8.1.7.3	Formule de Taylor-Young . . . . .	581
8.1.8	Extrema d'une application numérique . . . . .	582
8.1.8.1	Extrema absolus et extrema locaux . . . . .	583
8.1.8.2	Extrema locaux et différentielle . . . . .	585
8.1.8.3	Extrema locaux et différentielle seconde . . . . .	586
8.1.8.4	Extrema liés . . . . .	589
8.2	COMPLEMENT — INVERSION LOCALE, FONCTIONS IMPLICITES . . . . .	590
8.2.1	Endomorphismes inversibles . . . . .	590
8.2.2	Théorème d'inversion locale . . . . .	592
8.2.3	Théorème des fonctions implicites . . . . .	594
8.2.4	Théorème des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	597
8.3	EXERCICES . . . . .	601
8.3.1	Ouverts . . . . .	601
8.3.2	Différentielles et matrices jacobiennes . . . . .	602
8.3.2.1	Apprentissage du cours . . . . .	602
8.3.3	Dérivées directionnelles et dérivées partielles . . . . .	605
8.3.3.1	Apprentissage du cours . . . . .	605
8.3.3.2	Pour aller plus loin . . . . .	606
8.3.4	Matrices jacobiennes et fonctions composées . . . . .	609
8.3.4.1	Apprentissage du cours . . . . .	609

8.3.4.2	Pour aller plus loin . . . . .	610
8.3.5	Théorème des accroissements finis . . . . .	611
8.3.6	Applications de classe $C^1$ . . . . .	614
8.3.6.1	Apprentissage du cours . . . . .	614
8.3.6.2	Pour aller plus loin . . . . .	617
8.3.7	Applications de classe $C^2$ . . . . .	618
8.3.7.1	Apprentissage du cours . . . . .	618
8.3.7.2	Pour aller plus loin . . . . .	621
8.3.7.3	Pour en savoir plus . . . . .	625
8.3.8	Difféomorphismes . . . . .	626
8.3.8.1	Apprentissage du cours . . . . .	626
8.3.9	Opérateurs différentiels . . . . .	630
8.3.9.1	Apprentissage du cours . . . . .	630
8.3.9.2	Pour aller plus loin . . . . .	632
8.3.10	Formules de Taylor et extrema . . . . .	633
8.3.10.1	Apprentissage du cours . . . . .	633
8.3.10.2	Pour aller plus loin . . . . .	639
8.3.11	Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites . . . . .	640
8.3.11.1	Apprentissage du cours . . . . .	640
8.3.11.2	Pour aller plus loin . . . . .	647
8.4	PROBLEMES . . . . .	650
<b>9</b>	<b>GEOMETRIE DIFFERENTIELLE</b>	<b>653</b>
9.1	COURS . . . . .	653
9.1.1	Introduction . . . . .	653
9.1.1.1	Résumé . . . . .	653
9.1.1.2	Positionnement mathématique . . . . .	654
9.1.2	Paramétrisation d'une courbe . . . . .	654
9.1.2.1	Définitions et exemples . . . . .	655
9.1.2.2	Tracés avec Maple . . . . .	658
9.1.2.3	Courbe paramétrée . . . . .	658
9.1.2.4	Point régulier et tangente . . . . .	660
9.1.2.5	Paramétrisation cartésienne d'une courbe . . . . .	662
9.1.2.6	Courbe simple régulière . . . . .	664
9.1.3	Paramétrisation d'une surface . . . . .	668
9.1.3.1	Définitions . . . . .	668
9.1.3.2	Exemples fondamentaux . . . . .	669
9.1.3.3	Courbes tracées sur une surface . . . . .	670
9.1.3.4	Changement de paramétrage . . . . .	673
9.1.3.5	Point régulier d'une surface paramétrée . . . . .	674
9.1.3.6	Plan tangent à une nappe paramétrée . . . . .	675
9.1.3.7	Paramétrisation cartésienne d'une surface . . . . .	675
9.1.3.8	Surface simple régulière . . . . .	678
9.1.3.9	Position locale d'une surface par rapport à son plan tangent . . . . .	683

9.1.4	Equations implicites de courbes et de surfaces . . . . .	686
9.1.4.1	Courbes en dimension 2 . . . . .	686
9.1.4.2	Courbes en dimension 3 . . . . .	692
9.1.4.3	Surfaces . . . . .	695
9.1.5	Surfaces de révolution et surfaces réglées . . . . .	699
9.1.5.1	Surfaces de révolution . . . . .	699
9.1.5.2	Surfaces réglées . . . . .	701
9.1.5.3	Surfaces réglées cylindriques, coniques . . . . .	704
9.1.5.4	Récapitulatif sur les surfaces . . . . .	706
9.1.6	Longueur et paramétrage par l'abscisse curviligne . . . . .	707
9.1.6.1	Longueur d'une courbe . . . . .	707
9.1.6.2	Abscisse curviligne . . . . .	712
9.1.7	Récapitulatif sur les tracés avec Maple . . . . .	714
9.1.7.1	Tracés de courbes . . . . .	714
9.1.7.2	Tracés de surfaces . . . . .	715
9.2	EXERCICES . . . . .	717
9.2.1	Courbes paramétrées . . . . .	717
9.2.1.1	Apprentissage du cours . . . . .	717
9.2.1.2	Pour en savoir plus . . . . .	719
9.2.2	Surfaces paramétrées . . . . .	722
9.2.2.1	Apprentissage du cours . . . . .	722
9.2.2.2	Pour aller plus loin . . . . .	724
9.2.3	Surfaces de révolution, cônes et cylindres . . . . .	727
9.2.3.1	Apprentissage du cours . . . . .	727
9.2.3.2	Pour aller plus loin . . . . .	732
9.2.4	Courbes et surfaces implicites . . . . .	735
9.2.4.1	Apprentissage du cours . . . . .	735
9.2.4.2	Pour aller plus loin . . . . .	737
9.3	PROBLEMES . . . . .	746
<b>10</b>	<b>INTEGRATION</b> . . . . .	<b>753</b>
10.1	INTRODUCTION . . . . .	753
10.2	INTEGRALE DOUBLE D'UNE FONCTION CONTINUE . . . . .	754
10.2.1	Intégrale sur un pavé . . . . .	754
10.2.2	Intégrale sur un domaine défini par une courbe fermée . . . . .	756
10.2.3	Intégrale double et changement de variable . . . . .	758
10.3	FORMULE DU CALCUL INTEGRAL . . . . .	761
10.3.1	Formule de Green-Riemann . . . . .	766
10.3.2	Interprétation géométrique de l'intégrale double . . . . .	766
10.4	INTEGRALE DE SURFACE . . . . .	767
10.4.1	Intreprétation géométrique de l'intégrale de surface . . . . .	772
10.4.2	Théorème de Stokes . . . . .	776
10.5	ANNEXE . . . . .	781

<b>11</b>	<b>PROBABILITES</b>	<b>785</b>
11.1	COURS . . . . .	785
11.1.1	Introduction . . . . .	785
11.1.1.1	Résumé . . . . .	785
11.1.1.2	Positionnement mathématique . . . . .	785
11.1.2	Espaces probabilisés . . . . .	786
11.1.2.1	Introduction . . . . .	786
11.1.2.2	Algèbres et tribus . . . . .	787
11.1.2.3	Mesures et probabilités . . . . .	788
11.1.3	Variables aléatoires . . . . .	790
11.1.3.1	Variables aléatoires . . . . .	790
11.1.3.2	Fonction de répartition d'une variable aléatoire . . . . .	794
11.1.3.3	Probabilité conditionnelle et indépendance . . . . .	796
11.1.3.4	Moyenne et variance empiriques . . . . .	800
11.1.3.5	Lois à densité . . . . .	802
11.1.4	Lois discrètes finies classiques . . . . .	804
11.1.4.1	Loi de Dirac . . . . .	805
11.1.4.2	Loi de Bernoulli . . . . .	805
11.1.4.3	Loi uniforme . . . . .	806
11.1.4.4	Loi binomiale . . . . .	807
11.1.4.5	Loi hypergéométrique . . . . .	810
11.1.5	Lois discrètes infinies classiques . . . . .	812
11.1.5.1	Loi de Poisson . . . . .	812
11.1.5.2	Loi géométrique . . . . .	814
11.1.6	Lois à densité classiques . . . . .	816
11.1.6.1	Loi uniforme . . . . .	816
11.1.6.2	Loi exponentielle . . . . .	816
11.1.6.3	Loi Gamma . . . . .	819
11.1.6.4	Loi normale . . . . .	822
11.1.6.5	Loi de Cauchy . . . . .	826
11.1.6.6	Loi du chi 2 . . . . .	826
11.1.7	Convergence en loi . . . . .	828
11.1.7.1	Convergence en loi . . . . .	828
11.1.7.2	Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson . . . . .	829
11.1.7.3	Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale . . . . .	830
11.1.7.4	Théorème Central Limit . . . . .	831
11.1.7.5	Approximation de la loi binomiale et de la loi de Poisson par la loi normale . . . . .	831
11.1.8	Loi forte des grands nombres . . . . .	833
11.1.8.1	Loi forte des grands nombres . . . . .	833
11.1.8.2	Application : méthode de Monte Carlo pour le calcul d'intégrales . . . . .	835
11.1.9	Tests statistiques . . . . .	837
11.1.9.1	Estimation de la moyenne d'une loi normale . . . . .	837

11.1.9.2	Test du $\chi^2$ de Pearson . . . . .	838
11.1.9.3	Test du $\chi^2$ de l'indépendance . . . . .	842
11.2	COMPLEMENT 1 — THEOREME CENTRAL LIMIT . . . . .	844
11.2.1	Théorème de Paul Levy . . . . .	844
11.2.2	Théorème Central Limit . . . . .	844
11.3	COMPLEMENT 2 — LOI DU ZERO-UN DE KOLMOGOROV . . . . .	846
11.3.1	Tribu asymptotique . . . . .	846
11.3.2	Loi du zéro-un de Kolmogorov . . . . .	847
11.3.3	Lemme de Borel-Cantelli . . . . .	848
11.4	EXERCICES . . . . .	851
11.4.1	Espaces probabilisés . . . . .	851
11.4.1.1	Apprentissage du cours . . . . .	851
11.4.1.2	Pour aller plus loin . . . . .	853
11.4.2	Variables aléatoires . . . . .	854
11.4.2.1	Apprentissage du cours . . . . .	854
11.4.2.2	Pour aller plus loin . . . . .	856
11.4.3	Lois discrètes classiques . . . . .	858
11.4.3.1	Apprentissage du cours . . . . .	858
11.4.3.2	Pour aller plus loin . . . . .	859
11.4.4	Lois à densité classiques . . . . .	863
11.4.4.1	Apprentissage du cours . . . . .	863
11.4.4.2	Pour aller plus loin . . . . .	864
11.4.5	Convergence en loi . . . . .	868
11.4.5.1	Apprentissage du cours . . . . .	868
11.4.5.2	Pour aller plus loin . . . . .	869
11.4.6	Loi forte des grands nombres . . . . .	871
11.4.6.1	Apprentissage du cours . . . . .	871
11.4.7	Estimation et tests statistiques . . . . .	872
11.4.7.1	Apprentissage du cours . . . . .	872
11.5	PROBLEMES . . . . .	876
11.5.1	Processus de Poisson . . . . .	876
11.5.2	L'aiguille de Buffon . . . . .	878
<b>A</b>	<b>BIOGRAPHIE DES MATHEMATIENS CITES</b>	<b>881</b>
<b>B</b>	<b>FORMULAIRE</b>	<b>893</b>
B.1	FONCTIONS CIRCULAIRES . . . . .	893
B.2	FONCTIONS HYPERBOLIQUES . . . . .	894
B.3	FONCTIONS HYPERBOLIQUES RECIPROQUES . . . . .	895
B.4	DEVELOPPEMENTS EN SERIE . . . . .	895
B.5	PRIMITIVES . . . . .	896
<b>C</b>	<b>TABLES DES LOIS DE PROBABILITE CLASSIQUES</b>	<b>897</b>
C.1	TABLEAUX RECAPITULATIFS . . . . .	897
C.1.1	Lois discrètes finies classiques . . . . .	897
C.1.2	Lois discrètes infinies classiques . . . . .	898

C.1.3 Lois à densité classiques . . . . .	898
C.2 LOI NORMALE . . . . .	899
C.3 LOI DU $\chi^2$ . . . . .	900
<b>Bibliographie</b>	<b>903</b>
<b>Index</b>	<b>905</b>