Chapitre 1

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1.1 COURS

1.1.1 Introduction

1.1.1.1 Résumé

Nous nous intéressons dans ce chapitre à une forme particulière d'équations différentielles, à savoir les équations différentielles linéaires, et nous en menons l'étude en trois étapes.

Nous considérons tout d'abord des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 : théorème de Cauchy-Lipschitz, structure algébrique de l'ensemble des solutions, boîte à outils techniques des méthodes de variation de la constante et des coefficients indéterminés.

Puis nous abordons l'étude plus générale des systèmes différentiels linéaires, c'est-à-dire des équations différentielles linéaires où l'inconnue est une fonction vectorielle : examen du problème de Cauchy, structure algébrique de l'ensemble des solutions, formule de représentation dans le cas particulier des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

Enfin nous appliquons ces résultats à l'étude des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n, puis nous donnons des **techniques** de résolution applicables à certaines équations à coefficients constants dont la connaissance est **indispensable** en physique.

1.1.1.2 Positionnement mathématique

La plupart du temps, le processus de variation d'un phénomène est modélisé par une équation différentielle non linéaire. Ainsi l'équation de Newton exprimant la position $y_i(t)$ à l'instant t d'un corps de masse m_i soumis à la force d'attraction de $(n-1)$ autres corps est une équation différentielle non linéaire qui s'écrit

$$m_i y_i''(t) = G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} m_i m_j \frac{y_j(t) - y_i(t)}{\|y_j(t) - y_i(t)\|^3},$$

où G est la constante gravitationnelle. Ce type de problème, énoncé dès 1687 dans les *Principia*, n'est toujours pas résolu [1].
A l'heure actuelle, et pour palier ce manque, les mathématiciens ont développé
— des **méthodes qualitatives** qui décrivent, sans formule explicite, les propriétés d'éventuelles solutions directement à partir de la forme de l'équation différentielle,
— des **méthodes quantitatives** qui donnent des algorithmes pour approximer les solutions.

L'approche développée ici pour les équations différentielles linéaires ne s'exporte pas directement dans le vaste monde des équations différentielles, même dans les cas favorables où l'existence, voire l'unicité de solutions, peut être établie. Cependant, tout système différentiel, linéaire ou non, peut être localement approché par un système différentiel linéaire à coefficients constants (chapitre 8) : d'où l'importance primordiale des résultats de ce chapitre.

1.1.2 Equations linéaires scalaires d'ordre 1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux applications continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, A une primitive de a sur I, et y_0 un élément de $\mathbb{K}$.
On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions continûment dérivables de I dans $\mathbb{K}$.

1. On n'avait pas imaginé les solutions correspondant aux entrelacements dans les anneaux de Saturne avant leur découverte expérimentale, et l'on ne sait si ces solutions sont génériques ou exceptionnelles.

1.1.2.1 Définitions

Définition 1.1.1

Soit φ une application de I dans $\mathbb{K}$.

(i) On dit que φ est **solution sur I de l'équation différentielle**

$$(\mathcal{E}) \;\; y' = a(t)y + b(t)$$

si y est dérivable sur I et si pour tout $t \in I$, $\varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$.

(ii) On dit que φ est **solution sur I du problème de Cauchy** de l'équation $(\mathcal{E})$ relatif à la **condition initiale** $y(t_0) = y_0$ si

$$\begin{cases} \varphi \text{ est dérivable sur } I, \\ \varphi(t_0) = y_0, \\ \forall\, t \in I, \; \varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t). \end{cases}$$

Définition 1.1.2

On dit que l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ est

(i) **ordinaire**, car la fonction inconnue est une fonction d'une seule variable,

(ii) **du premier ordre**, car elle exprime une relation entre y' et y,

(iii) **linéaire**, car elle s'écrit sous la forme canonique $y'(t) = f(y(t),\, t)$ où $f(x,\, t) = a(t)x + b(t)$, et où les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ ne dépendent que de la variable t et pas de la fonction y,

(iv) **à coefficients constants** si le coefficient a est constant, i. e. indépendant de t,

(v) **homogène** si b est l'application nulle sur I.

Définition 1.1.3

L'équation

$$(\mathcal{H}) \;\; y' = a(t)y$$

s'appelle l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.

1.1.2.2 Formule de représentation

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 1.1.1 (Théorème de Cauchy Lipschitz — Cas linéaire scalaire)

Si les applications a et b sont **continues** sur l'intervalle I, alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution φ sur I. Cette solution est donnée par la **formule de représentation**

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) = \underbrace{e^{A(t)-A(t_0)}y_0}_{\text{solution de } y'=ay, \text{ valeur } y_0 \text{ en } t_0} + \underbrace{e^{A(t)}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)ds\right)}_{\text{solution de } y'=ay+b, \text{ valeur } 0 \text{ en } t_0} .$$

Remarque 1.1.4

La solution peut encore s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\, y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(u)du} b(s)\, ds \\ &= e^{A(t)-A(t_0)}\, y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(A(t)-A(s))} b(s) ds. \end{aligned}$$

Démonstration :
La méthode que nous utilisons s'appelle la méthode du **facteur intégrant**. Pour tout $t \in I$, on a l'équivalence

$$\varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-A(t)}\big(\varphi'(t) - a(t)\varphi(t)\big) = e^{-A(t)}b(t).$$

Cette écriture est motivée par le fait que si φ est dérivable sur I, alors φe^{-A} est dérivable sur I et a pour dérivée $(\varphi' - a\varphi)e^{-A}$. Si on la multiplie par le terme $e^{-A(t)}$, appelé facteur intégrant, l'équation différentielle se réduit à une quadrature (i. e. un calcul de primitive) : en effet, l'égalité précédente s'écrit, pour tout $t \in I$,

$$(e^{-A}\varphi)'(t) = e^{-A(t)}b(t),$$

de sorte que $e^{-A}\varphi$ est la primitive de $e^{-A}b$ qui prend en t_0 la valeur $e^{-A(t_0)}y_0$. Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$(e^{-A}\varphi)(t) = e^{-A}(t)\varphi(t) = e^{-A(t_0)}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(u)}b(u)du.$$

■

1.1.2.3 Applications théoriques

✔ *La formule de représentation du théorème 1 donne non seulement une méthode de calcul exact ou approché d'une solution, mais elle permet aussi de déterminer la structure de l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E})$. En effet, lorsque y_0 décrit $\mathbb{K}$, $C = e^{-A(t_0)}y_0$ décrit $\mathbb{K}$, et ainsi lorsque b est nul, toute solution sur I est de la forme $t \mapsto e^{A(t)}\,C$ où $C \in \mathbb{K}$.*

Proposition 1.1.5 (Droite vectorielle des solutions de $(\mathcal{H})$)

L'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène $(\mathcal{H})$ $y' = a(t)y$ est

$$\{t \mapsto e^{A(t)}\,C \ / \ C \in \mathbb{K}\},$$

i. e. la droite vectorielle engendrée par l'application $t \mapsto e^{A(t)}$.

Ce résultat est traditionnellement énoncé sous la forme suivante.

Proposition 1.1.6

La solution générale de l'équation homogène $y' = a(t)y$ est $t \mapsto e^{A(t)}C$.

Démonstration :
Le résultat découle immédiatement du théorème 1, avec $C = e^{-A(t_0)}y(t_0)$. ■

Proposition 1.1.7 (Droite affine des solutions de $(\mathcal{E})$)

Soit φ_0 une solution sur I de l'équation $(\mathcal{E})$ $y' = a(t)y+b(t)$. Alors l'ensemble des solutions sur I de $(\mathcal{E})$ est

$$\{t \mapsto \varphi_0(t) + e^{A(t)}\,C \ / \ C \in \mathbb{K}\},$$

i. e. la droite affine dirigée par l'application $t \mapsto e^{A(t)}$ et passant par φ_0.

Ce résultat est traditionnellement énoncé sous la forme suivante.

Proposition 1.1.8

La solution générale de $y' = a(t)y + b(t)$ est la somme d'une solution particulière de cette équation et de la solution générale de l'équation homogène associée.

Démonstration :
D'après le théorème 1, φ_0 s'écrit $\varphi_0 : t \mapsto C_0 e^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{(A(t)-A(s))}ds$. Il suffit alors de poser $C = y(t_0)e^{-A(t_0)} - C_0$. ■

✔ *Le résultat suivant, qui provient directement de la structure affine de l'ensemble des solutions, est très utilisé en physique.*
On verra sa généralisation à une somme infinie dans la suite de l'ouvrage.

Proposition 1.1.9 (Principe de superposition)

Soient b_1 et b_2 deux applications continues sur l'intervalle I.
Si φ_1 et φ_2 sont respectivement solutions sur I des équations

$$y' = a(t)y + b_1(t) \text{ et } y' = a(t)y + b_2(t),$$

alors $\varphi_1 + \varphi_2$ est solution sur I de l'équation $y' = a(t)y + b_1(t) + b_2(t)$.

Nous donnons maintenant deux techniques de calcul très utiles dans la pratique.

1.1.2.4 Techniques de calcul

Méthode de Lagrange de variation de la constante

✔ *Cet oxymore met en valeur une technique qui permet de retrouver les deux primitivations de la formule de représentation précédente, tout en évitant d'utiliser la méthode du facteur intégrant ou la formule de représentation.*

Proposition 1.1.10 (Méthode de variation de la constante)

Connaissant la solution générale

$$t \mapsto e^{A(t)}C$$

de l'équation $(\mathcal{H})$ $y' = a(t)y$, où A est une primitive de a sur I, on peut chercher une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$ $y' = a(t)y + b(t)$ sous la forme

$$t \mapsto e^{A(t)}C(t),$$

où C est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Il s'agit donc du changement de fonction inconnue $y(t) = e^{A(t)}C(t)$.
Cela conduit à l'équation

$$C'(t) = e^{-A(t)}b(t),$$

dont la solution s'obtient par une quadrature.

Démonstration :
Posons $y(t) = e^{A(t)}C(t)$. On a alors

$$y'(y) = A'(t)e^{A(t)}C(t) + e^{A(t)}C'(t) = e^{A(t)}(a(t)C(t) + C'(t)),$$

donc y est solution de l'équation $(\mathcal{E})$ si et seulement si pour tout $t \in I$,

$$e^{A(t)}(a(t)C(t) + C'(t)) = e^{A(t)}a(t)C(t) + b(t),$$

i. e.

$$e^{a(t)}C'(t) = b(t),$$

ou encore

$$C'(t) = e^{-A(t)}b(t).$$

Il suffit alors de calculer une primitive de $t \mapsto e^{-A(t)}b(t)$ pour obtenir y. ■

Méthode des coefficients indéterminés

✔ *Cette technique permet de résoudre certaines équations à coefficients constants dans lesquelles $b(t)$ a une forme particulière. Elle se substitue alors à un calcul d'intégrale par intégration par parties.*

Proposition 1.1.11 (Méthode des coefficients indéterminés)

Soient $(a,\, r) \in \mathbb{K}^2$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors l'équation

$$x'(t) = ax(t) + P(t)e^{rt}$$

admet une solution particulière de la forme

(i) $t \mapsto Q(t)e^{rt}$ si $r \neq a$,

(ii) $t \mapsto t\,Q(t)e^{rt}$ si $r = a$,

où $Q \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme de même degré que P, qui s'obtient par coefficients indéterminés.

Démonstration :
D'après la proposition 10, l'équation admet une solution de la forme $\varphi(t) = e^{at}C(t)$, avec

$$C'(t) = e^{-at}e^{rt}P(t) = e^{(r-a)t}P(t).$$

On applique alors la règle de calcul des primitives d'exponentielles-polynômes : si $m \neq 0$, alors $t \mapsto P(t)e^{mt}$ admet une primitive de la forme $t \mapsto Q(t)e^{mt}$, où Q est un polynôme de même degré que P ; et si $m = 0$, la primitive de P qui s'annule en 0 est de la forme $t \mapsto t\,Q(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P. Il existe donc une fonction C de la forme $C : t \mapsto Q(t)e^{(r-a)t}$ si $r \neq a$ (resp. $C : t \mapsto t\,Q(t)e^{(r-a)t}$ si $r = a$), d'où une solution φ de la forme $\varphi : t \mapsto Q(t)e^{rt}$ si $r \neq a$ (resp. $\varphi : t \mapsto t\,Q(t)e^{rt}$ si $r = a$). On trouve alors le polynôme Q par coefficients indéterminés. ■

1.1.2.5 Méthode d'Euler

Dans ce paragraphe, nous exposons une méthode de résolution numérique d'équations différentielles. Nous renvoyons à l'exercice 11 pour un exemple d'application.

Méthode d'Euler classique

• Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a un point de I, et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose [2] que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall\, t \in I,\ y'(t) = f(t,\ y(t)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

a une unique solution sur I, notée y.
En général, on ne peut pas calculer explicitement y, on cherche donc à l'évaluer numériquement sur un intervalle $[a,\ b] \subset I$.

2. Quand on suppose dans les définitions ce qu'on se propose de prouver, il n'est pas bien difficile de faire des démonstrations. Condillac, *Traité des systèmes, 1749*.