Sujet 2008

Exercice 1

On munit le plan affine $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit S la courbe d'équation :

$$y=\frac{x^2}{3}-\frac{3}{2}.$$

1. Quelle est la nature de S ?

2. Pour tout couple (u,v) de nombres réels, on note U le point de coordonnées (u,v) et pour tout x dans $\mathbb{R}$ on note $\mathrm{M}(x)$ le point de S d'abscisse x.

   On pose :

   $$f_{\mathrm{U}}(x)=\mathrm{UM}(x) \qquad \text{et} \qquad g_{\mathrm{U}}(x)=\left|f_{\mathrm{U}}(x)\right|^2.$$

   (a) Calculer g_{U}, g'_{U} et g''_{U}.
   Résoudre l'équation $g''_{\mathrm{U}}(x)=0$.

   (b) Donner le tableau des variations de f_{U}.

   (On ne cherchera pas à calculer explicitement le ou les nombres réels où f_{U} admet un extremum relatif).

3. On dira qu'un cercle C de centre U et de rayon UM est tangent à S si M est un point de S et si les tangentes en M à C et S coïncident.

   Soit U un point du plan n'appartenant pas à S et soit a dans $\mathbb{R}$.

   Montrer que le cercle de centre U et de rayon $\mathrm{UM}(a)$ est tangent en $\mathrm{M}(a)$ si et seulement si $g'_{\mathrm{U}}(a)=0$.

4. (a) Montrer que tout point n'appartenant pas à S est centre d'au moins un et d'au plus 3 cercles tangents à S.

(b) Pour U n'appartenant pas à *S*, on note $n(\mathrm{U})$ le nombre de réels *x* pour lesquels le cercle de centre U et de rayon $\mathrm{UM}(x)$ est tangent en $\mathrm{M}(x)$ à *S*.

Pour $1 \leq i \leq 3$, caractériser par une égalité ou une inégalité simple l'ensemble des points U n'appartenant pas à *S* tels que $n(\mathrm{U}) = i$.

On pourra être amené à discuter selon le signe de $81u^2 - 16v^3$.

Faire un croquis représentant *S* et les ensembles trouvés.

5. (a) Soit *a* dans $\mathbb{R}$. On note $D(a)$ la tangente en $\mathrm{M}(a)$ à *S*.

Donner une équation de $D(a)$.

(b) On note de nouveau U le point de $\mathscr{P}$ de coordonnées (u, v).

Discuter en fonction de *u* et *v* l'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{U} \in D(a)$.

(c) On suppose que l'équation $\mathrm{U} \in D(a)$ admet deux solutions distinctes a_1 et a_2.

Montrer que, si $\mathrm{UM}(a_1) = \mathrm{UM}(a_2)$, alors on a $u = 0$.

(d) Soit $\mathrm{U} \in \mathscr{P}$.

On suppose maintenant qu'il existe un cercle de centre U tangent à *S* en deux points distincts M et N de *S*.

Montrer que les tangentes à *S* en M et N sont concourantes, et que si l'on note V leur point d'intersection, on a $\mathrm{VM} = \mathrm{VN}$.

(e) Déterminer l'ensemble des points U n'appartenant pas à *S* pour lesquels il existe un cercle de centre U tangent à *S* en deux points distincts de *S*.

Exercice 2

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$. On considère un triangle ABC dont aucun côté n'est parallèle à l'axe des ordonnées (O*y*). A toute droite *D* non parallèle à (O*y*), on associe les points A', B' et C' intersections de *D* avec les parallèles à (O*y*) menées par A, B et C respectivement.

   Montrer qu'il existe une unique droite *D* pour laquelle la somme *s* des longueurs $\mathrm{AA'} + \mathrm{BB'} + \mathrm{CC'}$ est minimale et la caractériser.

2. Montrer qu'il existe une droite *D* pour laquelle la somme s_1 des distances de A, B et C à *D* est minimale. Montrer que cette droite est unique si ABC n'est pas isocèle et la caractériser.

Exercice 3

Les comptes « ronds »

Mon boucher ne compte jamais les centimes. Par exemple, j'ai pris 300 g de filet à 34,3 euros le kilo, 240 g de viande hachée à 8,6 euros le kilo et 640 g de blanc de poulet à 12,99 euros le kilo : j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.

1. En ramassant deux tickets tombés par terre, le boucher lit :
   - 750 g de côtelettes, 250 g de rôti. Total : 18 euros ;
   - 250 g de côtelettes, 500 g de rôti. Total : 17 euros.

   Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelettes et le kilo de rôti ? (on donnera toutes les solutions)
2. Pourquoi est-ce que la donnée de tous les tickets de la journée ne peut en aucun cas permettre de déterminer le prix exact de chacun des produits vendus ?

Corrigé

Exercice 1

1. La courbe S admet pour équation $y=\frac{x^2}{3}-\frac{3}{2}$, c'est-à-dire une équation de la forme $y=f(x)$ où f est une fonction polynôme de degré 2. Dans un repère orthonormé, la courbe représentative d'une telle fonction définie sur $\mathbb{R}$ est une parabole.
Ici, le plan $\mathscr{P}$ étant muni d'un tel repère, on en déduit :

$$\boxed{S \text{ est une parabole.}}$$

2. (a) On a : $\mathrm{U}(u,v)$ et $\mathrm{M}(x)\left(x;\frac{x^2}{3}-\frac{3}{2}\right)$. On en tire : $\overline{\mathrm{UM}(x)}\left(x-u;\frac{x^2}{3}-\frac{3}{2}-v\right)$ et, le repère étant orthonormé :

$$\left\|\overline{\mathrm{UM}(x)}\right\|=\mathrm{UM}(x)=\sqrt{(x-u)^2+\left(\frac{x^2}{3}-\frac{3}{2}-v\right)^2}=f_{\mathrm{U}}(x).$$

Et comme $g_{\mathrm{U}}(x)=\left[f_{\mathrm{U}}(x)\right]^2$, on a :

$$\boxed{g_{\mathrm{U}}(x)=(x-u)^2+\left(\frac{x^2}{3}-\frac{3}{2}-v\right)^2}$$

La fonction g_{U} est une fonction polynôme et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout x réel :

$$\begin{aligned}g_{\mathrm{U}}'(x)&=2\times(x-u)+2\times\frac{2x}{3}\times\left(\frac{x^2}{3}-\frac{3}{2}-v\right)\\&=\cancel{2x}-2u+\frac{4}{9}x^3\cancel{-2x}-\frac{4}{3}vx=\frac{4}{9}x^3-\frac{4}{3}vx-2u\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{g_{\mathrm{U}}'(x)=\frac{4}{9}x^3-\frac{4}{3}vx-2u}$$

La fonction g_U' est aussi une fonction polynôme et est de fait dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout *x* réel :

$$g_U''(x) = \frac{4}{9} \times 3x^2 - \frac{4}{3}v = \frac{4}{3}(x^2 - v)$$

Soit :

$$\boxed{g_U''(x) = \frac{4}{3}(x^2 - v)}$$

On a :

$$g_U''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{3}(x^2 - v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - v = 0.$$

Plusieurs cas doivent alors être envisagés :

- Si $v < 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle ;
- Si $v = 0$, l'équation admet une unique solution : 0 ;
- Si $v > 0$, l'équation admet deux solutions réelles : $-\sqrt{v}$ et $\sqrt{v}$.

(b) f_U prend des valeurs positives (il s'agit d'une distance !). On peut donc écrire, pour tout *x* réel : $f_U(x) = \sqrt{g_U(x)}$. Ainsi, la fonction f_U apparaît-elle comme la composée de la fonction g_U par la fonction racine carrée qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que les fonctions f_U et g_U ont le même sens de variation.
Comme nous avons calculé les deux premières dérivées de la fonction g_U à la question précédente, nous allons exploiter ces résultats pour déterminer les variations de cette fonction.

Nous avons vu, à la question précédente, que le nombre de solutions de l'équation $g_U''(x) = 0$ dépendait de *v*. Au-delà de ces solutions, c'est maintenant le signe de $g_U''(x)$ qui nous intéresse.

$\boxed{1^{\text{er}} \text{ cas : } v \leq 0}$

Dans ce cas, on a, pour tout *x* réel : $g_U''(x) \geq 0$. Le seul cas éventuel où $g_U''(x)$ s'annule correspond à la situation : $x = v = 0$. On en déduit que la fonction g_U' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Rappelons que l'on a, pour tout *x* réel : $g_U'(x) = \frac{4}{9}x^3 - \frac{4}{3}vx - 2u$.

La fonction g_U' est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.

Nous venons de voir qu'elle y était strictement croissante.

CORRIGÉ 2008

Enfin, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} g_{\mathrm{U}}'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{9}x^3 = -\infty$ et, de façon analogue : $\lim\limits_{x\to+\infty} g_{\mathrm{U}}'(x) = +\infty$.
Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors d'affirmer qu'il existe un unique réel α tel que $g_{\mathrm{U}}'(\alpha) = 0$.

Comme la fonction g_{U}' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit facilement son signe.

- Pour tout x réel de $]-\infty;\alpha[$, on a : $g_{\mathrm{U}}'(x) < 0$;
- $g_{\mathrm{U}}'(\alpha) = 0$;
- Pour tout x réel de $]\alpha;+\infty[$, on a : $g_{\mathrm{U}}'(x) > 0$.

Les variations de g_{U} en découlent directement :

- Sur $]-\infty;\alpha]$, la fonction g_{U} est strictement décroissante ;
- Sur $[\alpha;+\infty[$, la fonction g_{U} est strictement croissante.

Pour pouvoir dresser le tableau des variations demandé, il nous reste à calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

Pour tout x réel, on a : $g_{\mathrm{U}}(x) = (x-u)^2 + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{3}{2} - v\right)^2$.

La fonction g_{U} est une fonction polynôme de degré 4 et le terme de degré 4 est $\frac{x^4}{9}$.

On a donc : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g_U(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^4}{9} = +\infty$.

D'où, finalement, le tableau :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g_{\mathrm{U}}''(x)$		$+$		$+$	
g_{U}'	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g_{\mathrm{U}}'(x)$		$-$	0	$+$	
g_{U}	$+\infty$	$\searrow$	$g_{\mathrm{U}}(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$
f_{U}	$+\infty$	$\searrow$	$f_{\mathrm{U}}(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{2^{nd}\text{ cas : } v>0}$

Dans ce cas, on a :

- Pour tout x réel de $\left]-\infty;-\sqrt{v}\right[\cup\left]\sqrt{v};+\infty\right[$, on a : $g_U''(x)>0$;
- $g_U''\left(-\sqrt{v}\right)=g_U''\left(\sqrt{v}\right)=0$;
- Pour tout x réel de $\left]-\sqrt{v};\sqrt{v}\right[$, on a : $g_U''(x)<0$.

On en déduit :

- Sur $\left]-\infty;-\sqrt{v}\right]$ la fonction g_U' est strictement croissante ;
- Sur $\left[-\sqrt{v};\sqrt{v}\right]$, la fonction g_U' est strictement décroissante ;
- Sur $\left[\sqrt{v};+\infty\right[$, la fonction g_U' est strictement croissante.

Ainsi, pour pouvoir déterminer le signe de g_U', il convient de discuter suivant les signes de $g_U'\left(-\sqrt{v}\right)$ et $g_U'\left(\sqrt{v}\right)$ en tenant compte de $g_U'\left(\sqrt{v}\right)<g_U'\left(-\sqrt{v}\right)$.

$\boxed{\text{Si } 0\le g_U'\left(\sqrt{v}\right)<g_U'\left(-\sqrt{v}\right)}$

- Sur $\left]-\infty;-\sqrt{v}\right]$ la fonction g_U' est strictement croissante et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} g_U'(x)=-\infty$ et $g_U'\left(-\sqrt{v}\right)>0$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet ici encore de conclure qu'il existe un unique réel α dans $\left]-\infty;-\sqrt{v}\right[$ tel que $g_U'(\alpha)=0$. De la croissance de g_U', on tire :
  - $g_U'(x)<0$ sur $\left]-\infty;\alpha\right[$;
  - $g_U'(\alpha)=0$;
  - $g_U'(x)>0$ sur $\left]\alpha;-\sqrt{v}\right[$.
- Sur $\left[-\sqrt{v};\sqrt{v}\right]$, la fonction g_U' est strictement décroissante et on a $g_U'\left(-\sqrt{v}\right)>0$ et $g_U'\left(\sqrt{v}\right)\ge 0$. La fonction g_U' prend donc des valeurs positives sur cet intervalle ;
- Sur $\left[\sqrt{v};+\infty\right[$, la fonction g_U' est strictement croissante et on a $g_U'\left(\sqrt{v}\right)\ge 0$. La fonction g_U' prend donc des valeurs positives sur cet intervalle.

En définitive :

- Pour tout x de $\left]-\infty;\alpha\right[$, $g_U'(x)<0$;
- Pour tout x de $\left[\alpha;+\infty\right[$, $g_U'(x)\ge 0$ (la fonction g_U' s'annulant en α et, éventuellement, en $\sqrt{v}$).

On a alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		α		$-\sqrt{v}$		$\sqrt{v}$		$+\infty$
$g_U''(x)$			$+$		0	$-$	0	$+$	
g_U'	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$g_U'(-\sqrt{v})$	$\searrow$	$g_U'(\sqrt{v})$	$\nearrow$	$+\infty$
$g_U'(x)$		$-$	0		$+$		$+$		
g_U	$+\infty$	$\searrow$	$g_U(\alpha)$	$\nearrow$					$+\infty$
f_U	$+\infty$	$\searrow$	$f_U(\alpha)$	$\nearrow$					$+\infty$

$\boxed{\text{Si } g_U'(\sqrt{v}) < 0 < g_U'(-\sqrt{v})}$

- Sur $\left]-\infty;-\sqrt{v}\right]$ la fonction g_U' est strictement croissante et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} g_U'(x) = -\infty$ et $g_U'(-\sqrt{v}) > 0$.

  Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet ici de conclure qu'il existe un unique réel α dans $\left]-\infty;-\sqrt{v}\right[$ tel que $g_U'(\alpha) = 0$.

  De la croissance de g_U', on tire :

  - $g_U'(x) < 0$ sur $\left]-\infty;\alpha\right[$;
  - $g_U'(\alpha) = 0$;
  - $g_U'(x) > 0$ sur $\left]\alpha;-\sqrt{v}\right[$.

- Sur $\left[-\sqrt{v};\sqrt{v}\right]$, la fonction g_U' est strictement décroissante et on a $g_U'(-\sqrt{v}) > 0$ et $g_U'(\sqrt{v}) < 0$.

  Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure qu'il existe un unique réel β dans $\left]-\sqrt{v};\sqrt{v}\right[$ tel que $g_U'(\beta) = 0$.

  De la décroissance de g_U', on tire alors :

  - $g_U'(x) > 0$ sur $\left]-\sqrt{v};\beta\right[$;
  - $g_U'(\beta) = 0$;
  - $g_U'(x) < 0$ sur $\left]\beta;\sqrt{v}\right[$.