Chapitre 1

NOTIONS DE BASE SUR LES ENSEMBLES

On appelle ensemble noté par exemple *A* un groupe d'éléments.

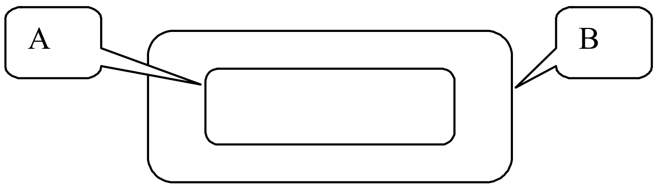
Exemple

L'ensemble des élèves de la classe, l'ensemble des couleurs d'un tableau, l'ensemble des ingrédients d'un gâteau, l'ensemble des chiffres de 0 à 9…

Soit A un ensemble, le cardinal de l'ensemble *A* noté card(*A*) est le nombre d'éléments qu'il possède.
Un ensemble ayant un seul élément est appelé singleton, s'il possède deux éléments on parlera d'un doublet.
Soit *A,* l'ensemble des chiffres on aura $A = \{0,12,3,4,5,6,7,8,9\}$ et le cardinal de cet ensemble sera tel que card(*A*) = 10 car l'ensemble A possède 10 éléments.
Ici, 1 est un élément de A on dit que "1 appartient à l'ensemble A" et on le note $1 \in$ A ; 15 n'est pas élément de A on note 15 $\notin$ A (on prononcera 15 n'appartient pas à A).

1.1 Inclusion

Soient *A* et B deux ensembles comprenant des éléments (nombres, noms de couleurs, noms de fruits…). On dit que *A* est inclus dans *B* si tout élément de *A* est dans *B*.



Notation : $A \subset B$ on lira "*A* est inclus dans *B*".

Exemples

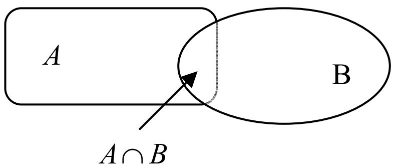
L'ensemble $C = \{0,2,4,6\}$ est inclus dans l'ensemble $E = \{0,2,3,4,6,8,10\}$: on notera C $\subset$ E ; par contre l'ensemble $F = \{0,1,2\}$ n'est pas inclus dans E ni dans C car l'élément 1 n'appartient ni à E ni à C ; on notera 1 $\notin$ E donc F$\not\subset$ E et 1$\notin$ C donc F $\not\subset$ C.
Par exemple, l'ensemble des entiers pairs : $A = \{0,2,4,...,2n,...\}$ est inclus dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. Mais $\left\{1,\frac{1}{2}\right\}$ n'est pas inclus dans $\mathbb{N}$ car $\frac{1}{2}$ n'est pas un entier.

Remarque

On appelle ensemble vide noté $\varnothing$ ou {} l'ensemble qui contient aucun élément.
On a alors : $\varnothing \subset A$ pour tout ensemble A (l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble A).

1.2 Intersection

Si A et B sont deux ensembles quelconques, on appelle intersection de A et B, l'ensemble noté $A \cap B$, formé des éléments qui sont dans A et dans B. $A \cap B$ se prononce "A inter B".



Exemple 1

$A = \{0,1,2\}$ $B = \{1,3,5\}$ $A \cap B = \{1\}$ A et B ont l'élément 1 en commun.

Exemple 2

Dans une classe soit A l'ensemble des élèves apprenant l'anglais, D l'ensemble des élèves apprenant l'allemand, $A \cap D$ est l'ensemble des élèves apprenant l'anglais et l'allemand.

Propriétés

On a : $(A \cap B) \subset A$

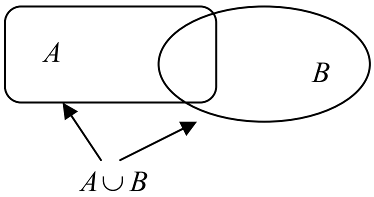
$(A \cap B) \subset B$

$\varnothing \cap A = \varnothing$

Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$; on lira : "Si A est inclus dans B, alors A inter B égale A". En effet, si A est inclus dans B, alors tous les éléments de A appartiennent à B donc l'intersection ou ensemble des éléments communs aux ensembles A et B correspond bien aux éléments de A.

1.3 Réunion

On appelle réunion de deux ensemble *A* et *B*, l'ensemble noté $A \cup B$, formé des éléments qui sont dans *A* ou dans *B*. $A \cup B$ se prononce "A union B".
Dans l'exemple 2 précédent, $A \cup B$ est l'ensemble des élèves faisant de l'anglais ou de l'allemand.



Dans l'exemple 1 précédent on a : $A \cup B = \{0,1,2,3,5\}$; on lira "A union B égale …".

Propriétés

On a : $A \subset (A \cup B)$

$B \subset (A \cup B)$

$(A \cap B) \subset (A \cup B)$

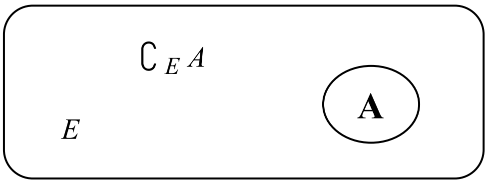
$A \cup \varnothing = A$

1.4 Ensemble complémentaire

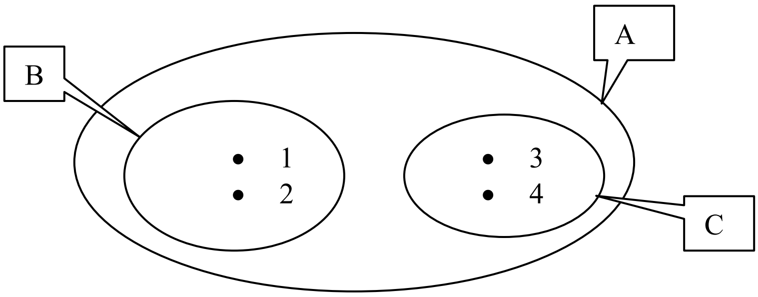
Soit $A \subset E$, on appelle complémentaire de *A* dans *E* noté $\complement_E A$, l'ensemble des éléments qui sont dans *E* et non dans *A*.

Exemple

Dans une classe, le complémentaire de l'ensemble des élèves demi-pensionnaires est l'ensemble des élèves externes.



Soient les ensembles $A=\{1,2,3,4\}$ et $B=\{1,2\}$ et C l'ensemble complémentaire de B dans A : on écrira $C=C_A B=\{3,4\}$. On pourra donc écrire les relations suivantes C ⊂ A et B ⊂ A ; C∩B=∅ et B∪C= A.



Propriétés

On a : $\complement_E \varnothing = E$

$\complement_E E = \varnothing$

$\complement_E (C_E A) = A$

De plus on a : $E = A \cup C_E A$ et $A \cap \complement_E A = \varnothing$

✓**Remarque**

Lorsqu'il n'y a pas d'équivoque, on note le complémentaire de A dans E : $\complement A$ au lieu de $\complement_E A$.

Exercices

Exercice 1

Soit $A=\{3,8,9\}$; $B=\{6,9,10,8,11\}$; $C=\{8,10,9,3,11,7\}$
Quelle(s) inclusion(s) peut-on écrire ? Pourquoi B n'est-il pas inclus dans C ?

Exercice 2

Soit E l'ensemble des entiers naturels inférieurs à 10
Soit $A=\{1,4,8,6,2\}$

1. Pourquoi a-t-on $A \subset E$?
2. Quel est le complémentaire de A dans E ?
3. Déterminer $A \cup \complement A$ et $A \cap \complement A$

Exercice 3

Soit $A=\{2,5,8,9\}$; $B=\{1,3,5,7,9\}$; $C=\{4,5,6,10,12\}$
Déterminer $A \cap B$ et $(A \cap B) \cap C$
Puis $B \cap C$ et $A \cap (B \cap C)$; conclure.

Exercice 4

Soit $E=\{0,1,2,3,4,5\}$; $A=\{0,2,4\}$ et $B=\{3,5\}$

1. Exprimer $\complement_E A$; $\complement_E B$
2. Exprimer $A \cap B$
3. Comparer $\complement A \cup \complement B$ et $\complement(A \cap B)$

Exercice 5

Soit $Z=\{jaune, bleu, vert, gris, rouge, rose, noir, marron, orange, violet\}$
Soit $A=\{jaune, bleu, vert, gris, rouge, rose\}$
Et $C=\{noir, marron, orange, violet\}$

1. Quelles inclusions peut-on écrire ?
2. Quelles relations d'appartenance ou de non appartenance peut-on écrire avec les éléments "jaune" et "violet" ?
3. Exprimer $\complement_Z A$; $\complement_Z C$
4. Exprimer $A \cap Z$

Correction des exercices

Exercice 1

$A \subset C$ car 3, 8, 9 sont bien dans *C*.
B n'est pas inclus dans *C* car 6 est dans *B*, non dans *C*.

Exercice 2

1. $A \subset E$ car tout élément de *A* est inférieur à 10
2. On a $\complement A = \{0, 3, 5, 7, 9, 10\}$
3. On a $A \cup \complement A = E$ et $A \cap \complement A = \varnothing$

Exercice 3

On a $A \cap B = \{5, 9\}$ et $(A \cap B) \cap C = \{5\}$
On a $B \cap C = \{5\}$ et $A \cap (B \cap C) = \{5\}$
D'où : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ noté $A \cap B \cap C$

Exercice 4

1. $\complement A = \{1, 3, 5\}$ $\complement B = \{0, 1, 2, 4\}$
2. $A \cap B = \varnothing$
3. $\complement A \cap \complement B = E$ et $\complement (A \cap B) = E$

Exercice 5

Soit $Z = \{jaune, bleu, vert, gris, rouge, rose, noir, marron, orange, violet\}$
Soit $A = \{jaune, bleu, vert, gris, rouge, rose\}$
Et $C = \{noir, marron, orange, violet\}$

1. Relations d'inclusions : $A \subset Z$; $C \subset Z$; $A \not\subset C$; $C \not\subset A$
2. Relations d'appartenance ou de non appartenance :
   $jaune \in A$; $jaune \in Z$; $jaune \notin C$
   $violet \in C$; $violet \in Z$; $violet \notin A$
3. Complémentaire de *A* dans *Z*
   $\complement_Z A = C = \{noir, marron, orange, violet\}$
   Complémentaire de *C* dans *Z*
   $\complement_Z C = A = \{jaune, bleu, vert, gris, rouge, rose\}$
4. $A \cap Z = A = \{jaune, bleu, vert, gris, rouge, rose\}$ car A est inclus dans Z.

Chapitre 2

OPÉRATIONS SUR LES RELATIFS ET RÈGLES DE PRIORITÉ

2.1 Définitions

2.1.1 Entiers naturels

Les entiers naturels sont tous les nombres entiers positifs. Il s'agit des nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6… etc.

Définition

On appelle $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels noté $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$ défini par : 0 est dans $\mathbb{N}$ et si n est dans $\mathbb{N}$, n+1 l'est aussi.

2.1.2 Entiers relatifs

On appelle ensemble des entiers relatifs l'ensemble noté $\mathbb{Z}$ formé des entiers naturels et leurs opposés :
$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, -3, ..., -n, ...\}$
Ce sont des nombres positifs ou négatifs sans partie décimale. Pour vous, un nombre négatif revêt un caractère abstrait mais vous allez vite comprendre avec un exemple.

Exemples

- Etage –3 : cela signifie 3 étages en dessous de 0, c'est-à-dire au troisième sous-sol.
- Le solde d'un compte vaut –2500 €, cela signifie que la personne titulaire de ce compte a un découvert de 2500 € : elle a 0 € sur son compte et doit 2500 € à la banque : son solde est négatif.

2.1.3 Décimaux

On appelle nombre décimal toute suite décimale finie. L'ensemble des nombres décimaux se note D.
1,52 ; –0,54 ; 1,23456 ; 1,5501 ; –0,00021 sont des nombres décimaux. Par contre, 0,33333…; 12,6666….. ne sont pas des décimaux car leur partie décimale n'est pas finie. 14 ; 27 ; 32000 sont aussi des décimaux car ils peuvent s'écrire sous la forme décimale 14, 0 ; 27,0 ; 32000,0.

2.1.4 Rationnels

On appelle nombre rationnel toute fraction positive ou négative. L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$.
$\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{-10}{3};\frac{17}{23}$ sont des nombres rationnels.

✓Remarque

$\frac{1}{2}$ peut être écrit sous forme décimale car $\frac{1}{2}=0{,}5$; par contre, $\frac{1}{3}$ n'a pas d'écriture décimale car $\frac{1}{3}\approx 0{,}33333........$ et ne correspond pas à une suite décimale finie.

2.1.5 Réels

On appelle nombres réels l'ensemble de tous les nombres ou encore l'ensemble de toutes les suites décimales limitées ou illimitées positives ou négatives. $-\frac{1}{2};0{,}32;15;\frac{16}{7};47{,}5;1{,}5555$ sont des réels.
L'ensemble des nombres réels se note $\mathbb{R}$.

2.2 Somme, produit, différence

Sur $\mathbb{Z}$, on considère l'addition, la multiplication, la soustraction.

2.2.1 Somme

Réaliser une somme correspond à exécuter l'addition de plusieurs nombres.
$3+2=2+3=5$