Avant-propos

Suite à la publication de notre précédent ouvrage, *Les maths au collège : démontrer pour comprendre*, beaucoup de lecteurs avaient émis le souhait de disposer de davantage d'exercices corrigés. Parallèlement à sa réédition, nous avons donc entrepris la rédaction du présent livre pour répondre à ces attentes. Pour que ce recueil-ci puisse être utilisé indépendamment du premier, nous avons fait précéder chaque série d'exercices d'un exposé synthétique du cours.

Conformément aux principes pédagogiques de l'*Enseignement explicite* [*], la structure de ce livre a été organisée suivant une liste d'*objectifs d'apprentissage*, formulés à l'aide de verbes d'action conjugués à la première personne. Ainsi l'élève prendra connaissance, sans ambiguïté,

- de la compétence à acquérir en lisant le titre du paragraphe ;
- des moyens d'y parvenir en lisant le cours condensé placé en début de paragraphe.

Les objectifs sont échelonnés de manière très progressive, notamment en ce qui concerne les compétences calculatoires. Leur liste est donnée en tête de chaque chapitre, avec une indication de la classe dans laquelle ils pourront être abordés (5e, 4e ou 3e).

Dans les premiers chapitres, nous avons réservé une large place aux exercices de calcul : opérations usuelles sur les nombres et calcul littéral. Faire ses gammes est indispensable pour parvenir à une maîtrise stable des connaissances. Force est de constater que cette pratique n'est pas très à la mode (sauf en sport où l'exigence de résultat est plus que jamais de mise) : on lui a fait le faux procès de mener à une pensée mécanique. Pourtant, comme le souligne éloquemment Liliane Lurçat [**], « il faut revaloriser la pédagogie des automatismes. L'installation et la conservation des automatismes se fondent sur un enseignement méthodique, appuyé sur les exercices et la répétition. On ne doit pas l'interpréter comme une automatisation de la pensée mais, bien au contraire, comme la condition de son émancipation. » En tenant l'élève en deçà de cette acquisition, on le condamne injustement à produire du babil mathématique. En revanche, l'assimilation de ces automatismes est source de confiance : il peut facilement mesurer ses progrès. Pourquoi vouloir le priver de cette gratification ?

Dans la discipline qui nous concerne, la méfiance à l'égard de cette pédagogie (pour ne pas dire son bannissement) avait trouvé un allié particulier dans le postulat selon lequel l'avènement des calculatrices devait nous dispenser de l'enseignement du

---

*. Voir, par exemple, de Clermont Gauthier, Steve Bissonnette, Mathieu Richard, Mireille Castonguay, *Enseignement explicite et réussite des élèves — La gestion des apprentissages*, Louvain-la-Neuve, De Boeck, 2013

**. Voir, notamment, de Liliane Lurçat, *La destruction de l'école élémentaire et ses penseurs*, Paris, François-Xavier de Guibert, 1998 calcul, sinon le restreindre à quelques allusions paléographiques : « Voici comment autrefois les élèves divisaient deux nombres décimaux… »

Si l'on transposait ce raisonnement à l'enseignement du français, on pourrait en inférer que le développement des logiciels de reconnaissance optique de caractères et de synthèse vocale nous délivre tout prochainement de l'apprentissage de la lecture.

Or, l'usage précoce et systématique de la calculatrice est nocif : elle ne permet pas à l'élève d'intérioriser les notions mathématiques et elle inhibe les facultés d'observation sans lesquelles les notions plus abstraites resteront inintelligibles. Voici un exemple de soustraction de fractions menée, à gauche par un élève qui utilise systématiquement sa calculatrice pour effectuer la moindre opération, à droite par un élève qui fait preuve d'intuition acquise par la pratique :

$$\begin{aligned}
&\frac{94}{95}-\frac{49}{38}\\
&=\frac{94\times 38}{95\times 38}-\frac{49\times 95}{38\times 95}\\
&=\frac{3572}{3610}-\frac{4655}{3610}\\
&=\frac{-1083}{3610}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{94}{95}-\frac{49}{38}\\
&=\frac{94}{5\times 19}-\frac{49}{2\times 19}\\
&=\frac{-57}{5\times 2\times 19}\\
&=\frac{-3\times \cancel{19}}{2\times 5\times \cancel{19}}\\
&=-\frac{3}{10}
\end{aligned}$$

Au final, celui de gauche aura du mal à exprimer le résultat sous forme de fraction irréductible, sauf s'il s'est procuré une calculatrice qui permet cette simplification… La comparaison est sans appel. À gauche, on peut dire, au mieux, qu'il sait utiliser une formule qui apparaît surtout comme une « recette de cuisine ». À droite, l'élève mobilise différentes notions assimilées antérieurement (notamment la divisibilité dans $\mathbb{N}$, la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers, la simplification de fractions, etc.) pour arriver de manière sûre, rapide et efficace au résultat correct.

À de rares exceptions près, les exercices de cet ouvrage sont à effectuer sans l'aide de la calculatrice. Les quelques-uns qui en nécessitent l'usage raisonné seront signalés par le pictogramme suivant : 

Même les exercices faisant intervenir le nombre π sont à traiter crayon en main (sauf mention explicite du contraire). En effet, il est beaucoup plus instructif de simplifier d'abord une écriture contenant π en la regardant comme une expression littérale, puis de remplacer le nombre π par l'approximation $\frac{22}{7}$ qui en fournit les trois premières décimales, et enfin d'en déduire une valeur approchée. On réactive ainsi des connaissances acquises en calcul littéral et en calcul fractionnaire. De plus, on évite le non-sens consistant à recopier la dizaine de décimales affichées par la calculatrice pour répondre à une question comme, par exemple, « donner le périmètre d'un objet de diamètre 1 m ». Voir à ce propos l'exercice 5.26 page 113.

Pour conclure ce plaidoyer, disons que, si le calcul n'est pas le tout des mathématiques, il n'en est pas moins la porte d'entrée. Cela étant dit, chaque fois que le thème s'y prête, nous avons proposé des exercices dans un contexte tiré de la vie courante ou d'autres disciplines.

Quant à la présentation de la géométrie, nous avons regroupé les notions qui sont dans le prolongement direct du cycle 3 dans un chapitre intitulé *Figures planes*, et abordé la démarche de démonstration dans le chapitre intitulé *Angles et distances*. Par exemple, nous avons mis en œuvre les cas d'égalité des triangles pour démontrer les propriétés des parallélogrammes. Néanmoins, nous n'avons pas exposé de manière détaillée comment les trois cas d'égalité des triangles permettent de démontrer de proche en proche tous les théorèmes de base de la géométrie plane, le sujet ayant déjà été traité dans notre premier ouvrage.

Certains énoncés comportent une figure géométrique dessinée sur un quadrillage. Pour les résoudre, l'élève devra commencer par reproduire la figure sur une feuille, de préférence à petits carreaux. Pour des contraintes de mise en page, les carreaux des quadrillages ont été souvent réduits. Sur sa feuille, l'élève pourra faire correspondre aux carreaux du livre des carreaux de 1 cm de côté (soit quatre petits carreaux).

Le livre se conclut par un chapitre consacré à l'algorithmique et à la programmation. Les exercices qui s'y trouvent sont généralement en rapport avec les autres chapitres.

Tout au long de l'ouvrage, certains exercices, demandant plus de réflexion, sont signalés par un astérisque ($\star$).

Nous accueillerons avec reconnaissance les critiques et suggestions que le lecteur voudra bien nous faire parvenir à l'adresse électronique suivante : `maths.college.demontrer@gmail.com`

Équations | 9

Sommaire

1. Vocabulaire

Je teste si un nombre est solution d'une équation

Chercher la valeur d'une lettre x à partir d'une égalité faisant intervenir cette lettre x, c'est ce que l'on appelle *résoudre une équation*. La lettre x est alors appelée *inconnue* car sa valeur n'est pas connue au départ. Évidemment, une fois le travail effectué, la valeur de x devient connue. Les deux expressions de part et d'autre du signe d'égalité sont appelées les *membres* de l'équation.

Par exemple, si on sait que $5x + 1 = 11$, on peut souhaiter déterminer la ou les valeurs de x correspondantes (c'est-à-dire la ou les valeurs de x pour lesquelles l'équation $5x + 1 = 11$ sera vérifiée). Il est facile de voir que, dans ce cas-là, cette valeur de x (appelée *solution* de l'équation) vaut 2 puisque $5 \times 2 + 1 = 11$.

Exercice 1.

a) On considère l'équation $(15x - 13)x = 6$ d'inconnue x. Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont solutions de cette équation ?

$$-2 \;;\quad -1{,}2 \;;\quad -1 \;;\quad -\frac{1}{3} \;;\quad 0 \;;\quad 1{,}2 \;;\quad 3$$

b) Parmi les équations suivantes, desquelles le nombre $-2{,}4$ est-il solution ?

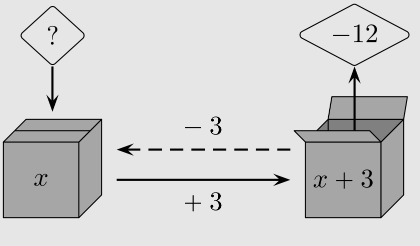
$$5x + 4 = 32 \;;\quad 5(x + 4) = 32 \;;\quad x(5x + 3) = 36 \;;\quad x(5x + 3) = 0$$

2. Équations du premier degré

Je résous une équation de la forme $x + a = b$, d'inconnue x

Exemple. Quel est le nombre noté x qui vérifie l'égalité $x + 3 = -12$?

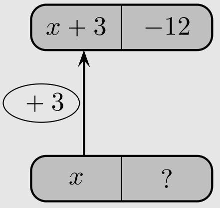
➠ On peut imaginer que le nombre x est caché dans une boîte : si on lui ajoute 3, on sait que la boîte contient alors le nombre -12.



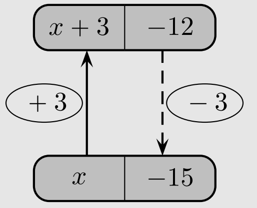
L'opération inverse de l'addition étant la soustraction, il suffit de retrancher 3 à -12 pour trouver la valeur de x ; ainsi on trouve que $x = -15$.

On peut présenter notre raisonnement de manière un peu plus schématique et le disposer en colonnes :

- Reformulation de l'énoncé :



- Résolution :



Notation. Dans cet ouvrage, lorsque nous aurons à résoudre une équation, nous noterons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation étudiée. On placera alors les solutions dans un « sachet », figuré par des accolades.
Par exemple, si l'équation étudiée possède pour unique solution le nombre -15 (comme dans l'exemple que l'on vient de traiter), on notera $\mathcal{S} = \{-15\}$.

Exercice 2. Résous les équations suivantes.

a) $x+5=7$ c) $x+7=5$ e) $x+5=-7$ g) $x+7=-5$

b) $x-5=7$ d) $x-7=5$ f) $x-5=-7$ h) $x-7=-5$

Exercice 3. Résous les équations suivantes.

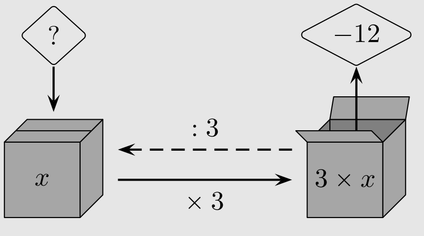
a) $x+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$ c) $x+\frac{1}{2}=-\frac{3}{5}$ e) $x+\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$ g) $x+\frac{3}{5}=-\frac{1}{2}$

b) $x-\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$ d) $x-\frac{1}{2}=-\frac{3}{5}$ f) $x-\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$ h) $x-\frac{3}{5}=-\frac{1}{2}$

Je résous une équation de la forme $a \times x = b$, d'inconnue x

Exemple. Quel est le nombre noté x qui vérifie l'égalité $3x=-12$?

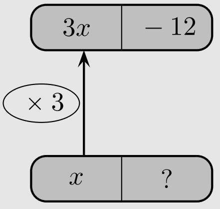
➠ On peut imaginer que le nombre x est caché dans une boîte : si on le multiplie par 3, on sait que la boîte contient alors le nombre -12.



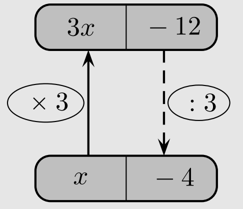
L'opération inverse de la multiplication étant la division, il suffit de diviser -12 par 3 pour trouver la valeur de x ; ainsi on trouve que $x=-4$.

Comme précédemment, présentons la résolution en colonnes :

- Reformulation de l'énoncé :



- Résolution :



En conclusion, $\mathcal{S} = \{-4\}$

Notation.

- Si l'équation étudiée ne possède aucune solution (comme c'est le cas par exemple avec l'équation $0 \times x = 1$), on notera $\mathcal{S} = \{\}$ ou encore $\mathcal{S} = \emptyset$ (symbole du « sachet vide »).
- Si tous les nombres réels sont solutions de l'équation (comme c'est le cas par exemple avec l'équation $0 \times x = 0$), on notera $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

Exercice 4. Résous les équations suivantes.

a) $5x = 7$ c) $7x = -5$ e) $5x = \frac{1}{7}$ g) $7x = -\frac{1}{5}$

b) $\frac{x}{5} = 7$ d) $\frac{x}{7} = -5$ f) $\frac{x}{5} = \frac{1}{7}$ h) $\frac{x}{7} = -\frac{1}{5}$

Exercice 5. Résous les équations suivantes.

a) $12\,x = 15$ c) $12\,x = \frac{1}{15}$ e) $15\,x = -12$ g) $15\,x = -\frac{1}{12}$

b) $\frac{1}{12}\,x = 15$ d) $\frac{1}{12}\,x = \frac{1}{15}$ f) $\frac{1}{15}\,x = -12$ h) $\frac{1}{15}\,x = -\frac{1}{12}$

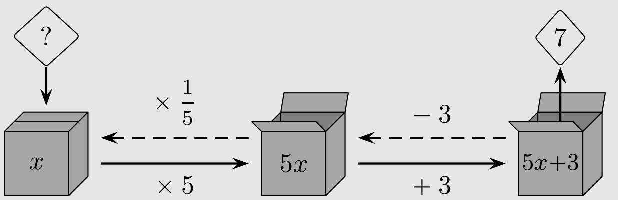
Exercice 6. Résous les équations suivantes.

a) $5x = 5$ b) $5x = 0$ c) $0x = 5$ d) $0x = 0$

Je résous une équation de la forme $ax + b = c$, d'inconnue x

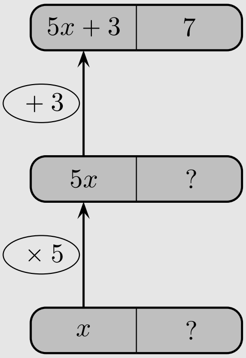
Exemple. Soit à résoudre l'équation $5x + 3 = 7$.

➠ Pour trouver la valeur de x, il nous faut procéder à présent en deux temps :

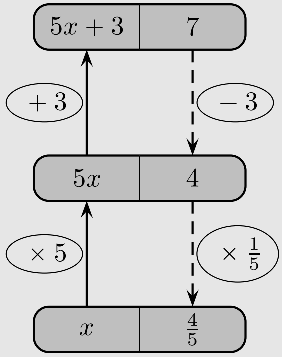


Comme précédemment, présentons la résolution en colonnes :

- Reformulation de l'énoncé :



- Résolution :



En conclusion, $\mathcal{S} = \left\{\frac{4}{5}\right\}$

Exercice 7. Résous les équations suivantes.

a) $3x+5=7$

b) $3x-5=7$

c) $3x+5=-7$

d) $3x-5=-7$

e) $3x+\frac{1}{5}=\frac{1}{7}$

f) $3x-\frac{1}{5}=\frac{1}{7}$

g) $3x+\frac{1}{5}=-\frac{1}{7}$

h) $3x-\frac{1}{5}=-\frac{1}{7}$

i) $\frac{1}{3}x+5=7$

j) $\frac{1}{3}x-5=7$

k) $\frac{1}{3}x+5=-7$

l) $\frac{1}{3}x-5=-7$

Exercice 8. Résous les équations suivantes.

a) $7\,x+6=5$

b) $7\,x-6=5$

c) $7\,x+6=-5$

d) $7\,x-6=-5$

e) $7\,x+\frac{1}{6}=\frac{1}{5}$

f) $7\,x-\frac{1}{6}=\frac{1}{5}$

g) $7\,x+\frac{1}{6}=-\frac{1}{5}$

h) $7\,x-\frac{1}{6}=-\frac{1}{5}$

i) $\frac{1}{7}\,x+6=5$

j) $\frac{1}{7}\,x-6=5$

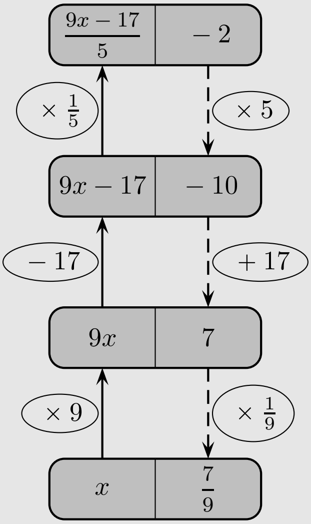
k) $\frac{1}{7}\,x+6=-5$

l) $\frac{1}{7}\,x-6=-5$

Je résous une équation de la forme $\frac{ax+b}{c}=d$, d'inconnue x

Exemple. Soit à résoudre l'équation $\dfrac{9x-17}{5}=-2$

➠ Comme précédemment, on présente la résolution en colonnes.



signifie $\frac{9x-17}{5} = -2$

signifie $9x - 17 = -10$

signifie $9x = 7$

signifie $x = \frac{7}{9}$

Dans chaque boîte, l'expression qui se trouve à gauche égale celle qui se trouve à droite. En fait, le raisonnement que l'on fait depuis le début du chapitre revient à écrire des égalités successives, qui ont été écrites à droite dans le schéma ci-dessus. À chaque étape, on écrit une équation différente, mais toutes ces équations ont un point commun qui les relie : elles ont le même ensemble de solutions.

➪ Deux équations sont *équivalentes* si elles ont même ensemble de solutions.

Résoudre une équation consiste donc à transformer successivement l'équation de départ en des équations qui lui sont équivalentes, mais qui sont de plus en plus simples.

Quelles sont les transformations que l'on peut opérer sur une équation sans modifier l'ensemble des solutions ? La méthode que nous avons employée précédemment revenait en fait à utiliser les deux principes suivants :

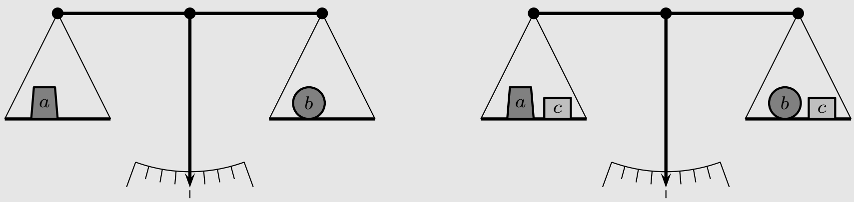
Principe n° 1 ➪ Si on ajoute (ou retranche) un même nombre aux deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.
Autrement dit, pour tous réels a, b et c, on a :

$$a = b \quad \textit{équivaut à} \quad a + c = b + c$$

Principe n° 2 ➪ Si on multiplie (ou divise) les deux membres d'une égalité par un même nombre *non nul*, on obtient une nouvelle égalité.
Autrement dit, pour tous réels a, b et $c \neq 0$, on a :

$$a = b \quad \textit{équivaut à} \quad a \times c = b \times c$$

Remarque. Lorsque tous les nombres considérés sont positifs, le principe n° 1 peut s'illustrer par le fait que l'équilibre des plateaux d'une balance est conservé lorsqu'on ajoute à chaque plateau la même masse :



$$a = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a + c = b + c$$

De même, lorsque tous les nombres considérés sont positifs, le principe n° 2 peut s'illustrer par le fait que l'équilibre des plateaux d'une balance est conservé lorsqu'on double (cas $c = 2$), triple (cas $c = 3$), etc. la masse sur chaque plateau.

Présentation définitive de la méthode de résolution d'une équation.
Dorénavant, nous pourrons nous passer des boîtes : on pourra se contenter d'écrire, grâce aux principes n° 1 et 2, des équations équivalentes entre elles jusqu'à obtenir la valeur de l'inconnue :

$$\begin{array}{ccrcll}
 & & \dfrac{9x-17}{5} & = & -2 & \\
\times 5 & & & \text{équivaut à} & & \times 5 \\
 & & 5 \times \dfrac{9x-17}{5} & = & 5 \times (-2) & \\
 & & & \text{éq. à} & & \\
 & & 9x - 17 & = & -10 & \\
+17 & & & \text{éq. à} & & +17 \\
 & & (9x-17) + 17 & = & (-10) + 17 & \\
 & & & \text{éq. à} & & \\
 & & 9x & = & 7 & \\
\times \frac{1}{9} & & & \text{éq. à} & & \times \frac{1}{9} \\
 & & \dfrac{1}{9} \times 9x & = & \dfrac{1}{9} \times 7 & \\
 & & & \text{éq. à} & & \\
 & & x & = & \dfrac{7}{9} &
\end{array}$$

On conclut : $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{7}{9} \right\}$

Exercice 9. Résous les équations suivantes.

a) $\dfrac{3x+2}{5} = 7$ d) $\dfrac{3x+2}{5} = -4$ g) $\dfrac{9x-12}{8} = -15$ j) $\dfrac{1-3x}{5} = \dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{2x+3}{7} = 5$ e) $\dfrac{-6x+5}{7} = 3$ h) $\dfrac{9x-12}{8} = 15$ k) $\dfrac{5x+9}{4} = \dfrac{-7}{2}$

c) $\dfrac{3x-2}{5} = 4$ f) $\dfrac{-6x-5}{7} = 3$ i) $\dfrac{3x-2}{5} = \dfrac{3}{2}$ l) $\dfrac{4x-7}{8} = \dfrac{-5}{6}$