

Table des matières

Avant-propos	v
Notations	xiii
1. Rappels et compléments	1
1.1. Quelques notations	1
1.2. Rappels sur les fonctions usuelles	3
Notions et points essentiels	11
I Fonctions réelles d'une variable réelle	13
2. Généralités sur les fonctions	15
2.1. Intervalles de \mathbb{R}	15
2.2. Voisinages	16
2.3. Fonction numérique	17
2.4. Opérations sur les fonctions numériques	18
2.5. Exemples	19
2.6. Fonctions et relation d'ordre sur \mathbb{R}	21
Notions et points essentiels	22
Exercices	23
3. Limites	25
3.1. Définition de la limite	25
3.2. Limite à droite, limite à gauche	27
3.3. Détermination des limites	28
Notions et points essentiels	33
Exercices	34
4. Fonctions continues	35
4.1. Continuité en un point	35
4.2. Continuité sur un intervalle	37
4.3. Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle	38
4.4. Théorèmes fondamentaux	39
Notions et points essentiels	41
Exercices	41

5. Fonctions dérivables	43
5.1. Dérivée en un point.....	43
5.2. Fonction dérivée – Dérivée sur un intervalle.....	46
5.3. Opérations sur les fonctions dérivables.....	47
5.4. Applications au sens de variations des fonctions.....	49
5.5. Primitive.....	50
Notions et points essentiels.....	51
Exercices.....	51
6. Propriétés graphiques des fonctions	53
6.1. Fonctions paires et impaires.....	53
6.2. Représentation graphique d’une fonction.....	54
6.3. Fonctions convexes et concaves.....	55
6.4. Fonctions bijectives et réciproques.....	58
Notions et points essentiels.....	62
Exercices.....	62
7. Développement limité d’ordre 1 et calculs approchés	65
7.1. Développement limité d’ordre 1.....	65
7.2. Approximation affine.....	66
7.3. Variation absolue et différentielle.....	67
7.4. Variation relative et élasticité.....	68
7.5. Applications en économie :	
fonction moyenne et fonction marginale.....	70
Notions et points essentiels.....	73
Exercices.....	74
8. Développement limité à l’ordre n	77
8.1. Approximation polynomiale d’ordre n	78
8.2. Application à la position de la tangente par rapport au graphe.....	79
Notions et points essentiels.....	81
Exercices.....	81
9. Extrema des fonctions d’une variable	83
9.1. Définitions.....	83
9.2. Fonction dérivable sur un intervalle ouvert.....	84
9.3. Fonction dérivable sur un intervalle fermé borné.....	88
9.4. Fonction dérivable par morceaux sur un intervalle.....	89
Notions et points essentiels.....	90
Exercices.....	90

II Fonctions de deux variables – Optimisation	93
10. Géométrie élémentaire dans le plan et dans l'espace	95
10.1. Les ensembles \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 : le plan et l'espace.....	95
10.2. Points et vecteurs.....	96
10.3. Produit scalaire, norme et distance associées	100
10.4. Droite dans le plan et dans l'espace.....	103
10.5. Plan dans l'espace.....	107
10.6. Quelques autres ensembles remarquables du plan et de l'espace.....	108
Notions et points essentiels	110
Exercices	111
11. Topologie du plan	113
11.1. Boules	113
11.2. Frontière d'un sous-ensemble	114
11.3. Ouverts, fermés	115
11.4. Intérieur d'un ensemble.....	116
11.5. Petit catalogue d'ensembles ouverts ou fermés.....	117
11.6. Ensembles bornés et ensembles compacts.....	117
11.7. Ensembles convexes	119
Notions et points essentiels	123
Exercices	124
12. Fonctions réelles de deux variables réelles	127
12.1. Définitions et exemples fondamentaux	127
12.2. Opérations algébriques	128
12.3. Relation d'ordre.....	129
12.4. Représentations graphiques	130
Notions et points essentiels	134
Exercices	134
13. Fonctions continues	137
13.1. Définitions	137
13.2. Opérations algébriques et composition.....	139
Notions et points essentiels	141
Exercices	142
14. Dérivées partielles du premier ordre	143
14.1. Définitions	143
14.2. Opérations sur les dérivées partielles.....	145
14.3. Fonctions de classe \mathcal{C}^1	146
Notions et points essentiels	149
Exercices	149

15. Développement limité d'ordre 1 et calculs approchés	151
15.1. Développement limité d'ordre 1.....	151
15.2. Approximation affine	153
15.3. Variation absolue et différentielle	155
15.4. Variation relative et élasticités.....	157
15.5. Applications en économie : fonctions marginales.....	158
Notions et points essentiels	160
Exercices	160
16. Dérivées partielles du deuxième ordre et développement limité d'ordre 2	163
16.1. Fonctions dérivées partielles secondes	163
16.2. Fonctions de classe \mathcal{C}^2	164
16.3. Matrice Hessienne.....	165
16.4. Développement limité d'ordre 2.....	166
16.5. Signe de la forme quadratique associée à la matrice hessienne	167
16.6. Position du plan tangent par rapport au graphe.....	169
Notions et points essentiels	172
Exercices	172
17. Fonctions convexes ou concaves de deux variables	175
17.1. Définitions pour les fonctions de classe \mathcal{C}^1	175
17.2. Critère pour les fonctions de classe \mathcal{C}^2	176
17.3. Propriétés des fonctions convexes ou concaves	179
17.4. Convexité ou concavité locale	183
Notions et points essentiels	185
Exercices	185
18. Généralités sur les extrema	189
18.1. Définitions	189
18.2. Simplification d'un problème d'extremum	191
Notions et points essentiels	192
Exercices	192
19. Extrema libres des fonctions de deux variables	193
19.1. Condition nécessaire ou condition du premier ordre	193
19.2. Nature des points critiques.....	195
19.3. Quelques conseils pour la résolution du système des conditions nécessaires du premier ordre.....	201
Notions et points essentiels	203
Exercices	204

20. Propriétés du gradient	207
20.1. Équations des tangentes aux courbes de niveau	207
20.2. Direction d'accroissement optimal d'une fonction	208
20.3. Application à l'économie : taux marginal de substitution	210
Notions et points essentiels	211
Exercices	211
21. Extrema liés des fonctions de deux variables	213
21.1. Cas d'une liaison explicite.....	214
21.2. Conditions nécessaires ou conditions du premier ordre	215
21.3. Optimisation sur un compact	219
21.4. Conditions suffisantes	220
21.5. Résolution graphique	225
21.6. Interprétation économique du multiplicateur de Lagrange	226
Notions et points essentiels	228
Exercices	229
III Problèmes et corrections	231
22. Énoncés	233
23. Corrections des exercices et des problèmes	241
23.1. Corrections des exercices	241
23.2. Corrections de quelques problèmes	281
Index	287