Chapitre 1 - Les outils

I. Outils mathématiques

1. Présentation des résultats numériques

a. Les chiffres significatifs

Pour expliquer ce que sont les chiffres significatifs, prenons l’exemple simple de la division de 1 par 3300. Lorsque la calculatrice est en mode « normal », abréviation « NORM » dans le menu (et nous invitons le lecteur à lire, si ce n’est déjà fait, la notice de sa calculatrice certainement neuve), elle affiche :

– Les zéros à gauche du premier chiffre non nul ne sont pas des chiffres significatifs ;
– Le premier chiffre non nul et tous les chiffres à sa droite, même les zéros, sont significatifs ;
– Présenter un résultat avec trois chiffres significatifs, c’est donner les trois premiers chiffres significatifs en arrondissant le troisième au plus proche.

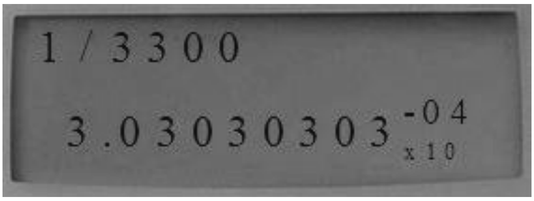
Par exemple ici : $1/3300 = 3{,}03.10^{-4}$

ou $1/3300 = 30{,}3.10^{-5}$

ou encore $1/3300 = 303.10^{-6}$

b. Le mode « SCI » de la calculatrice

En mode « scientifique » (SCI) le premier chiffre présenté est le premier chiffre significatif.



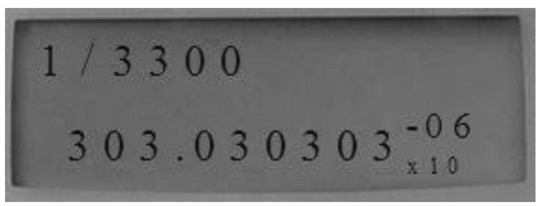
Pour présenter le résultat, il n'y a donc plus qu'à arrondir au plus proche le dernier chiffre significatif demandé, sans oublier l'exposant.

Par exemple à trois chiffres significatifs : $1/3300 = 3{,}03.10^{-4}$

Ou à quatre chiffres significatifs : $1/3300 = 3{,}030.10^{-4}$

c. Le mode « ENG » de la calculatrice

En mode « engineer » (ENG) le premier chiffre présenté est le premier chiffre significatif.



La virgule est placée de sorte à ce que l'exposant corresponde à un préfixe du système international d'unités (SI) (voir ci-dessous).

d. Utilisation des préfixes SI

Pour donner un résultat on préférera encore utiliser un préfixe SI (tableau 1) plutôt qu'une puissance de dix.

Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Symbole
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	déci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	µ
10^{12}	téra	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^{6}	méga	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^{2}	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	déca	da	10^{-24}	yocto	y

Tableau 1 : préfixes du système international d'unités.

Par exemple, si le calcul d'une longueur ℓ donne $303{,}030303.10^{-6}$ mètres, on notera, avec trois chiffres significatifs, le résultat $\ell = 303$ µm qui se lit « 303 micromètres ». On comprend ici l'avantage du mode « ENG » de la calculatrice.

2. La dérivée

a. Coefficient directeur d'une droite

Soit un plan pourvu d'un repère constitué des axes (Ox) et (Oy). Soit une droite de ce plan définie par deux points A et B, de coordonnées respectives (x_A ; y_A) et (x_B ; y_B) (voir figure 1). Le coefficient directeur de cette droite est alors défini comme un scalaire, que nous allons noter « *a* », et tel que :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Sous la forme $y_B - y_A = a(x_B - x_A)$ on remarque facilement que si $x_B - x_A = 1$ alors $y_B - y_A = a$.

Le coefficient directeur correspond à la valeur dont varie y lorsque x augmente d'une unité.

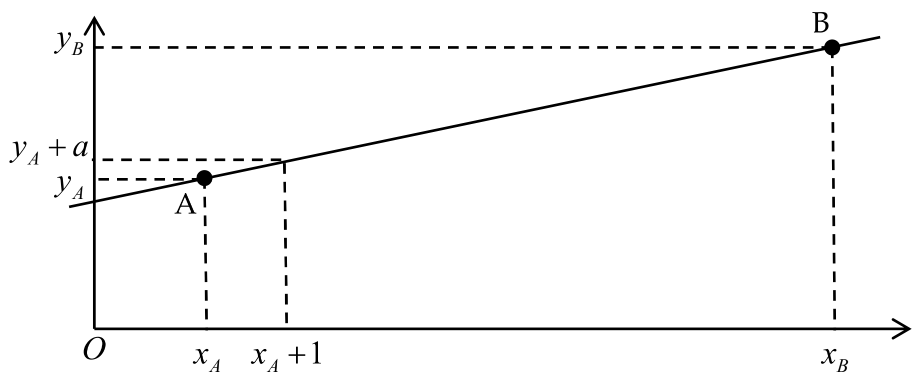


Figure 1 : le coefficient directeur d'une droite est la valeur « a » qui correspond à la variation de y lorsque x augmente d'une unité. « a » est négatif si la droite est décroissante.

b. La fonction dérivée d'une fonction f(x)

Soient A et B deux points de la représentation graphique d'une fonction $f(x)$ représentée en gris sur la figure 2. Les abscisses de ces deux points sont alors respectivement $f(x_A)$ et $f(x_B)$. En déplaçant le point B le long de la représentation graphique dans la direction de A jusqu'au point B' (figure 2), on visualise que si B se rapproche infiniment près de A, la droite (AB) sera confondue avec la tangente à la représentation graphique au point A (figure 3).

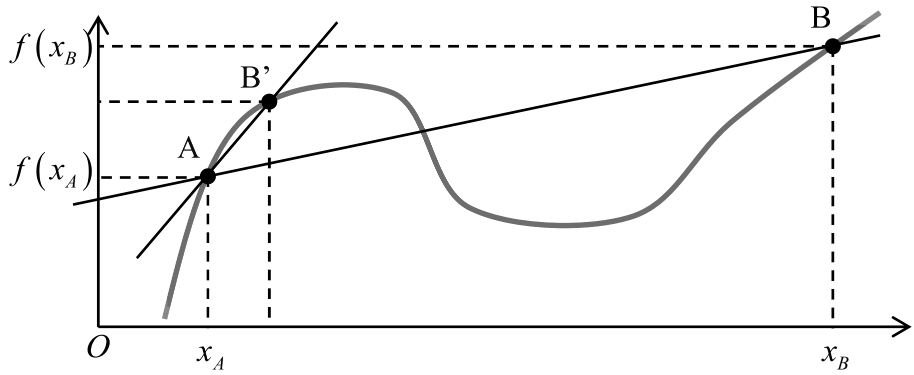


Figure 2 : sur ce schéma sont représentées les droites passant par A et par des points plus ou moins proches de A.

Le coefficient directeur de la tangente en A à la représentation graphique de la fonction $f(x)$, que nous continuons pour l’instant de noter « a », est alors défini par la limite, lorsque B tend vers A, du rapport de la différence des abscisses par la différence des ordonnées :

$$a = \lim_{B \to A} \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$$

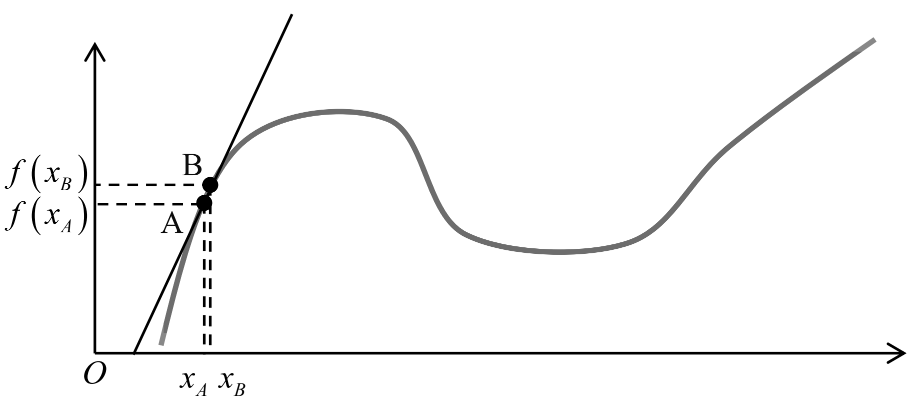


Figure 3 : lorsque le point B est infiniment proche du point A, la droite passant par les deux points est la tangente à la courbe.

Comme B tend vers A, la différence ($x_B - x_A$) devient une valeur infinitésimale (aussi proche de zéro que nous pouvons l’imaginer… sans jamais être nul) notée dx. Nous pouvons écrire :

$$a = \frac{f(x_A + dx) - f(x_A)}{(\cancel{x_A} + dx) - \cancel{x_A}}$$

Comme dx est infinitésimal $f\left(x_A+dx\right)$ ne peut être différent de $f\left(x_A\right)$ que d'une valeur infinitésimale que nous notons $df\left(x_A\right)$.

Nous obtenons :

$$a=\frac{\left(\cancel{f\left(x_A\right)}+df\left(x_A\right)\right)-\cancel{f\left(x_A\right)}}{dx}=\frac{df\left(x_A\right)}{dx}$$

Nous insistons auprès du lecteur sur le fait que la notation $\frac{df\left(x_A\right)}{dx}$ est donc la division de la valeur numérique $df\left(x_A\right)$ par la valeur numérique dx. Trop d'étudiants voient cette notation comme un symbole mathématique abstrait voulant juste dire « dérivée de la fonction » en oubliant qu'il s'agit d'une division.

Il n'y aura donc rien d'étonnant à écrire :

$$a=\frac{df\left(x_A\right)}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad df\left(x_A\right)=a.dx$$

S'il est possible de calculer pour chaque valeur de x la valeur de « a », il est alors possible de définir la fonction $f'\left(x\right)$ appelée « dérivée de la fonction $f\left(x\right)$ », telle que pour toutes valeurs de x, $f'\left(x\right)$ soit la valeur du coefficient directeur de la tangente à la représentation graphique de la fonction $f\left(x\right)$ au point d'abscisse x.

Nous avons alors au point d'abscisse x_A :

$$\boxed{f'\left(x_A\right)=\frac{df\left(x_A\right)}{dx}=a}$$

Et nous pouvons écrire pour toutes valeurs de x :

$$\boxed{f'\left(x\right)=\frac{df\left(x\right)}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad df\left(x\right)=f'\left(x\right).dx}$$

Rappelons sans démonstration quelques fonctions dérivées usuelles (tableau 2) :

fonctions	fonctions dérivées
a	0
$ax+b$	a
ax^n+b	$a.n.x^{n-1}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$a.f(x)$	$a.f'(x)$
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$f(x).g(x)$	$f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$
$a.f^n(x)+b$	$a.n.f^{n-1}(x).f'(x)$
$f(g(x))$	$f'(g(x)).g'(x)$

Tableau 2 : quelques fonctions et leurs dérivées.

3. Le développement limité d’ordre 1

Le développement limité d’ordre 1 permet de donner une expression approchée d’une fonction, le but étant généralement d’obtenir une expression plus simple.

Appuyons-nous sur la représentation graphique d’une fonction pour imager la méthode (figure 4).

Soit des points A et B de la représentation graphique d’une fonction $f(x)$ de coordonnées respectives $(x_A; f(x_A))$ et $(x_B; f(x_B))$. Soit la tangente à la courbe au point A et le point C sur cette tangente ayant la même abscisse que le point B (voir figure 4). $f'(x_A)$ étant le coefficient directeur de la tangente, nous obtenons comme ordonnée du point C la valeur $f(x_A)+f'(x_A)\times(x_B-x_A)$.

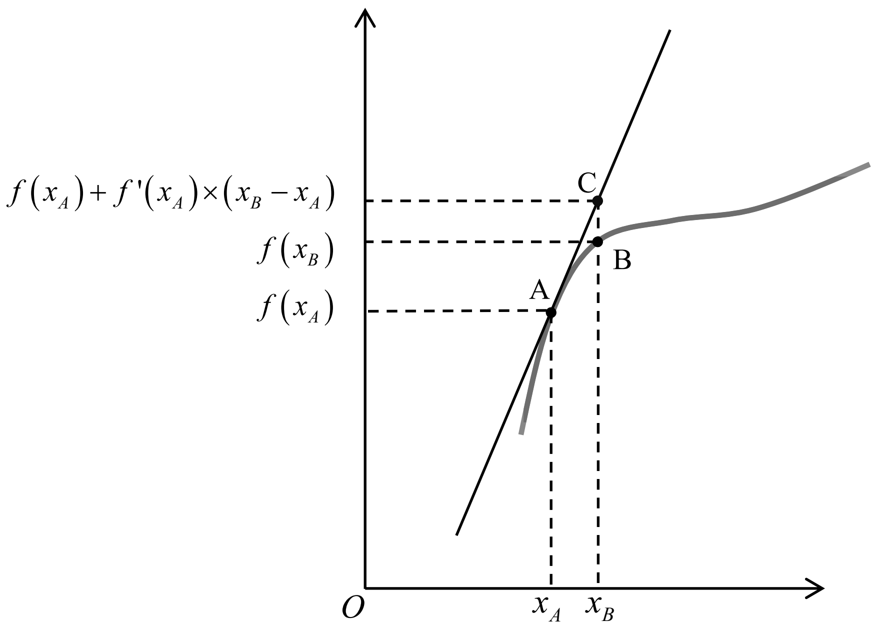


Figure 4 : représentation graphique de la fonction $f(x)$ sur laquelle on peut voir que si la valeur $(x_B - x_A)$ est très petite on pourra confondre les ordonnées des points B et C et écrire $f(x_B) \sim f(x_C)$.

Si maintenant la différence $(x_B - x_A)$ tend vers une valeur très petite, les points B et C s'approchent l'un de l'autre (en s'approchant du point A) et leurs ordonnées tendent également l'une vers l'autre jusqu'à être quasi égales. Nous pouvons alors écrire $f(x_B) \approx f(x_A) + f'(x_A) \times (x_B - x_A)$.

En notant ε la très petite valeur $(x_B - x_A)$ et en faisant cette démarche quelle que soit l'abscisse x d'un point de la courbe nous obtenons l'expression plus générale :

$$f(x+\varepsilon) \approx f(x) + f'(x) \times \varepsilon$$

Expression du développement limité d'ordre 1 de la fonction $f(x)$ lorsque $\varepsilon \ll 1$

4. L'intégrale

a. Aire sous une courbe

Considérons la représentation graphique d'une fonction $f(x)$ sur la figure 5. Pour calculer l'aire sous la courbe comprise entre les points A et B, nous allons approximer cette aire à la somme des aires des rectangles représentés remplis de motifs.

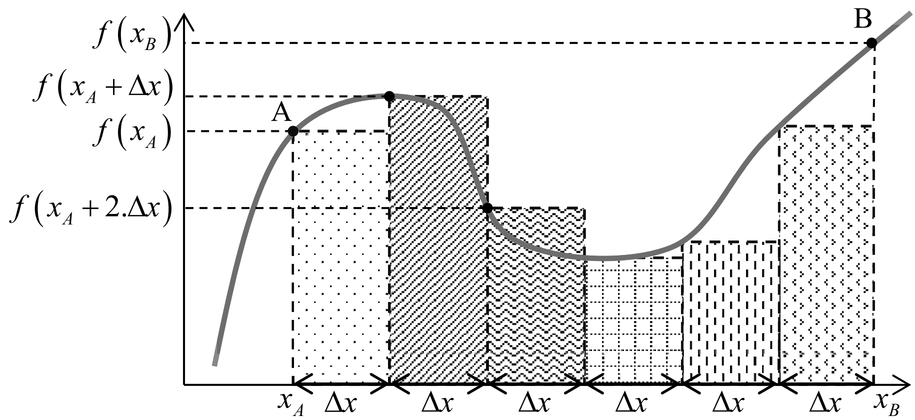
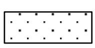
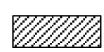


Figure 5 : approximation de l'aire sous la courbe entre les points A et B à la somme des aires de six rectangles.

Le premier rectangle, celui le plus à gauche sur la figure 5 et rempli par le motif , à une hauteur égale à $f(x_A)$ et une largeur égale à $\Delta x = \frac{x_B - x_A}{n}$ avec ici la représentation particulière de n = 6. L'aire de ce premier rectangle est donc égale au produit de la hauteur par la largeur : $f(x_A) \times \Delta x$.

Le deuxième rectangle, dont le motif est , a une hauteur égale à $f(x_A + \Delta x)$ et une largeur égale à $\Delta x = \frac{x_B - x_A}{k}$. Cela donne une aire dont l'expression est : $f(x_A + \Delta x) \times \Delta x$.

De proche en proche nous obtenons l'expression de l'aire du k$^{\text{ième}}$ rectangle : $f(x_A + (k-1)\Delta x) \times \Delta x$.

Si nous approximons l'aire sous la courbe, notée A, à la somme des aires des rectangles, alors :

$$A \approx \underbrace{f(x_A).\Delta x}_{\substack{\text{surface du premier} \\ \text{rectangle, de hauteur} \\ f(x_A) \text{ et de largeur } \Delta x}} + \underbrace{f(x_A + \Delta x).\Delta x}_{\substack{\text{surface du deuxième} \\ \text{rectangle, de hauteur} \\ f(x_A + \Delta x) \text{ et de largeur } \Delta x}} + f(x_A + 2\Delta x).\Delta x + ...$$

$$\approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_A + k\Delta x).\Delta x$$

Nous remarquons que par rapport à l'aire sous la courbe nous comptons parfois trop de surface (c'est le cas pour les 2$^{\text{ème}}$ et 3$^{\text{ème}}$ rectangles), et parfois pas assez (1$^{\text{er}}$, 4$^{\text{ème}}$, 5$^{\text{ème}}$ et 6$^{\text{ème}}$ rectangles). Par contre, ce que nous comptons en plus n'est pas égal à ce que nous obtenons en moins !